

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par
Christian MARCHAL

1^{re} THÈSE : Transferts optimaux entre orbites elliptiques.
(Durée indifférente)

2^e THÈSE : Figures d'équilibre séculairement stables
des masses fluides hétérogènes en rotation.

Soutenues le 27 juin 1967 devant la Commission d'examen.

MM. P. GERMAIN Président.

Y. THIRY
J. KOVALEVSKY } Examineurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc
1967

THÈSES
PRÉSENTÉES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
POUR OBTENIR
LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES
par
Christian MARCHAL

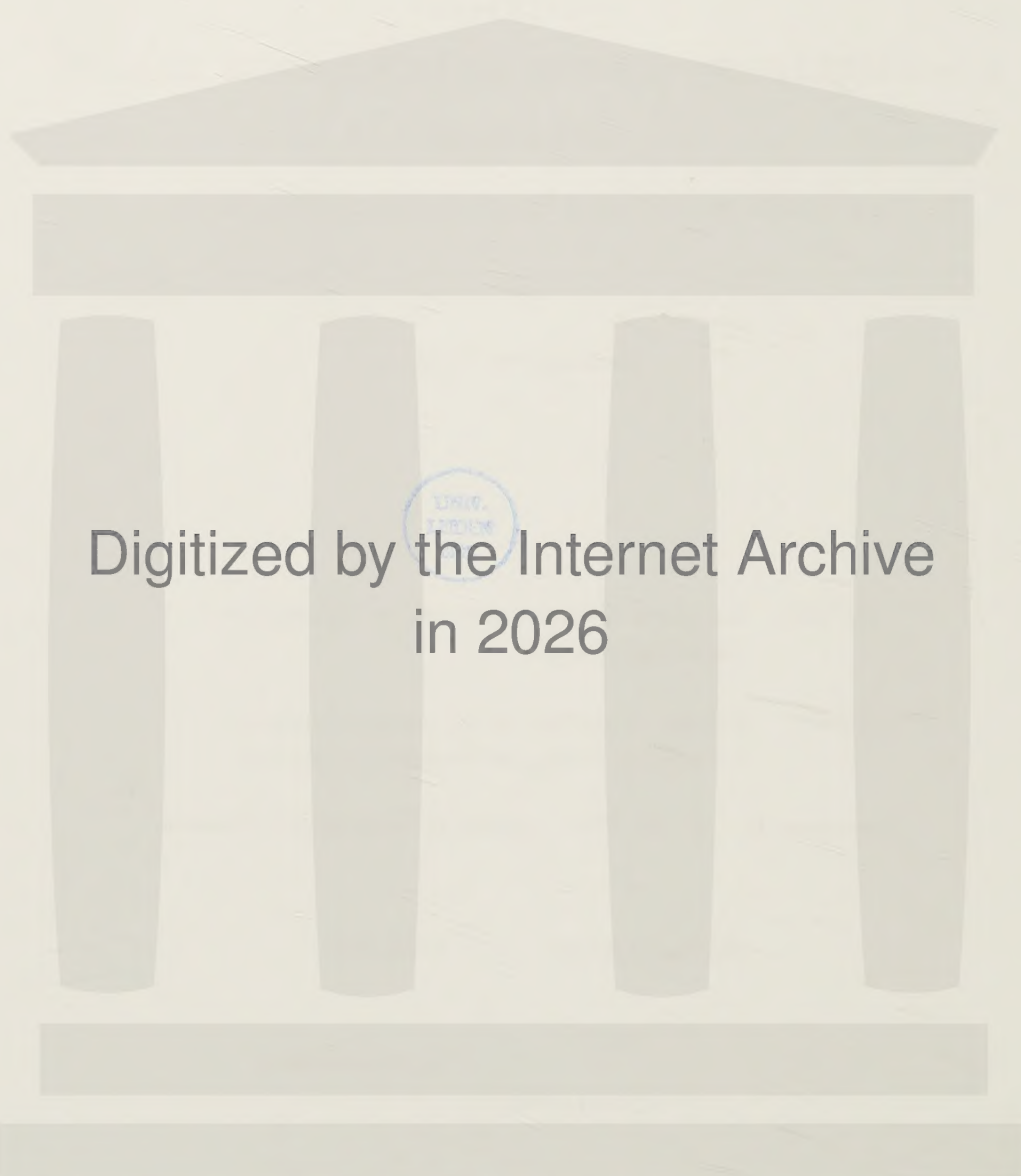
1^{re} THÈSE : Transferts optimaux entre orbites elliptiques.
(Durée indifférente)

2^e THÈSE : Figures d'équilibre séculairement stables
des masses fluides hétérogènes en rotation.

Soutenues le 27 juin 1967 devant la Commission d'examen.

MM. P. GERMAIN Président.

Y. THIRY }
J. KOVALEVSKY } Examineurs.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549003_0043

Ma reconnaissance va tout d'abord à Dieu, mes parents et mon épouse qui m'ont donné l'essentiel : grandir puis vivre dans un foyer uni, aimant, ouvert.

Je remercie tout spécialement Monsieur le Professeur Yves THIRY qui par ses remarques, ses conseils, ses recommandations, ses objections m'a beaucoup aidé tout au long de mon travail.

Je remercie aussi Monsieur le Professeur Paul GERMAIN, Monsieur l'Ingénieur Général du Génie Maritime Pierre CONTENSOU et l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales qui m'ont accueilli et m'ont donné la possibilité d'effectuer le présent travail.

Je tiens enfin à dire ma gratitude à Monsieur Jean KOVALEVSKY, à Monsieur Bruno MORANDO et à mes amis du Bureau des Longitudes chez qui j'ai trouvé un grand nombre de renseignements très utiles surtout en ce qui concerne le second sujet de cette thèse.

*A mes professeurs
et en particulier à
MM. TEBOUL, DOLLON, CHAZEL,
FAVARD et TARDI.*

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
RÉSUMÉ - SUMMARY	2
<u>INTRODUCTION</u>	3
<u>PREMIÈRE PARTIE</u>	
I,1. Définition du caractère optimal du transfert	3
I,2. Exposé succinct des théories d'optimisation	4
I,2.1. Théorie de CONTENSOU	4
I,2.2. Théorie de PONTRYAGIN	4
I,3. Notations	5
I,4. Action d'une poussée des propulseurs	6
I,5. Conditions d'utilisation optimale d'une fusée	8
<u>DEUXIÈME PARTIE</u>	
II,1. Nouvelle définition du caractère optimal du transfert	11
II,2. Equations du problème	11
II,3. Recherche des sous-systèmes indépendants	12
II,4. Etude du sous-système indépendant (Transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires)	12
II,4.1. Considérations pratiques sur les transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires	18
II,5. Mise en évidence de la simplicité des transferts optimaux entre orbites coaxiales directes	19
II,6. Etude des transferts optimaux entre orbites coaxiales directes	24
II,6.1. Détermination des valeurs optimales de i' , i'' et A	25
II,6.2. Etude de quelques cas particuliers	27
II,6.3. Résultats généraux	33
<u>TROISIÈME PARTIE - TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES ELLIPTIQUES COPLANAIRES</u>	
III,1. Analyse de quelques propriétés des transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires	39
III,2. Résumé des résultats déjà connus	42
<i>Cas particuliers</i>	
III,2.1. Transferts optimaux entre orbites quasi-circulaires voisines	55
III,2.2. Transferts optimaux entre orbites dont l'une est d'excentricité voisine de 1	64
III,2.3. Transferts optimaux entre orbites égales	70
III,2.4. Transferts optimaux entre orbites coaxiales inverses	73
III,3. Résultats généraux sur les transferts entre orbites coplanaires	81
III,3.1. Cas des orbites "détachées"	83
III,3.2. Cas des orbites "embrassées"	85
III,3.3. Cas des orbites "croisées"	88
III,3.4. Remarques pratiques générales sur les transferts entre orbites coplanaires	94
III,4. Point de vue pratique sur les transferts entre orbites coplanaires et entre orbites coaxiales directes	94
III,4.1. Remplacement d'une impulsion par un arc de poussée	95
III,4.2. Remarques pratiques sur les transferts optimaux "par l'infini"	96
<u>QUATRIÈME PARTIE - TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES ELLIPTIQUES QUELCONQUES</u>	
IV,1. Indications sur les angles spatiaux utiles	101
IV,2. Etude du transfert optimal dans le cas où les excentricités sont proches de 1	108
<u>CINQUIÈME PARTIE - POINT DE VUE PRATIQUE</u>	
V,1. Sur le problème du rendez-vous	115
V,2. Remplacement d'une impulsion par un ou plusieurs arcs de poussée	116
<u>CONCLUSION</u>	121
<u>RÉFÉRENCES</u>	122
SOMMAIRE - ABSTRACT - ZUSAMMENFASSUNG - Краткое изложение	123 à 131



RÉSUMÉ

L'analyse des conditions d'utilisation optimale d'une fusée, dans le cas particulier de l'étude envisagée, conduit à choisir un paramètre de prix indépendant de la fusée utilisée : la vitesse caractéristique.

Les transferts optimaux entre orbites « coaxiales directes » (coplanaires ou non) – c'est-à-dire entre orbites ayant même direction de périégée – sont analysés en détail. Ceux entre orbites coplanaires sont plus complexes, une longue partie de l'étude leur est consacrée.

Les transferts entre orbites quelconques ne sont que peu développés.

Les solutions optimales sont impulsionnelles; il n'y a jamais plus de trois impulsions finies.

Le point de vue pratique est examiné à la fin de l'étude.

(Voir également le sommaire à la fin).

OPTIMAL TRANSFERS BETWEEN ELLIPTIC KEPLERIAN ORBITS (TIME-FREE CASE)

SUMMARY

The analysis of the optimal conditions of rocket utilization leads to a cost parameter independent of the given rocket : the characteristic velocity.

The optimal transfers between « direct co-axial orbits » (co-planar or no co-planar) – i.e. orbits whose major axes are superimposed and whose perigees are on the same side of the attracting planet – are analysed in detail. The case of co-planar orbits is more complex, it forms a great part of the study.

The case of arbitrary orbits is very complicated and very incomplete.

The optimal solutions are always impulsionnal; there is never more than three finite impulses.

The practical point of view is examined in the last part of the study.

(See also the longer abstract at the end).

La présente publication a fait l'objet d'une thèse de Doctorat d'Etat soutenue le 13 juin 1967, à la Faculté des Sciences de Paris.

INTRODUCTION

Le problème du transfert entre orbites et celui du rendez-vous spatial (rejoindre – en position et vitesse – un mobile réel ou fictif circulant dans l'espace) sont évidemment des problèmes essentiels de l'exploration spatiale.

Etant donné le coût de cette exploration, il est très intéressant de rechercher de quelle manière doit s'effectuer un transfert ou un rendez-vous afin qu'il soit le plus économique possible.

Le problème ainsi posé est très complexe même dans le cas des orbites képlériennes soustraites à toute influence perturbatrice, c'est-à-dire dans un champ d'attraction Newtonien dû à un seul centre de masse ponctuel et fixe; jusqu'à présent, toutes les études analytiques ont porté sur l'un des deux cas plus simples suivants :

1. transfert ou rendez-vous sur une orbite infiniment proche de l'orbite de départ en un temps limité fixé,
2. transfert ou rendez-vous sur une orbite quelconque sans limitation de durée.

C'est ce dernier cas qui est exposé ici; l'économie de masse des engins spatiaux y correspond toujours à l'emploi du transfert de vitesse caractéristique minimale que la vitesse d'éjection soit modulable ou non (l'optimisation conduit toujours à l'emploi de la vitesse d'éjection maximale).

Il arrive souvent que l'on obtienne des transferts de durée prohibitive, voire même infinie, l'étude donnera alors un minimum de la consommation à consentir, minimum dont on pourrait se rapprocher autant qu'on le voudrait en un temps suffisamment long.

Des problèmes similaires ont déjà été traités (Références n° 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5) le plus souvent avec des hypothèses restrictives (orbites coplanaires, nombre limité d'impulsions, etc...) il y a aussi de nombreuses études numériques (Références n° 0,2; 0,5; 0,6). Les études générales (par exemple : Référence 0,3) et les synthèses de l'état de la question (Référence 0,7) sont encore très peu nombreuses.

I - PREMIÈRE PARTIE

I,1. DÉFINITION DU CARACTÈRE OPTIMAL DU TRANSFERT.

Il y a un seul centre attractif ponctuel fixe et de masse donnée.

Au temps $t_1 = 0$, un mobile est sur une orbite elliptique déterminée, on veut qu'en un temps ultérieur indifférent t_2 (fini ou infini), il soit sur une autre orbite elliptique donnée d'avance en ayant choisi le transfert demandant l'utilisation de la masse minimale de propulsif.

On peut distinguer deux problèmes :

- A. Le problème du transfert simple où la position le long de l'orbite finale n'est pas précisée.
- B. Le problème du rendez-vous où le mobile doit rejoindre un autre mobile réel ou fictif circulant sur l'orbite finale.

Toutefois, le rendez-vous n'est pas plus coûteux que le transfert simple, il suffit en effet, avant d'achever le transfert, d'attendre le « bon moment » sur une orbite voisine de l'orbite visée et de période un peu différente (Cf. le raisonnement rigoureux, chapitre V, 1.).

Nous n'aurons donc que des problèmes de transfert simple.

I.2. EXPOSÉ SUCCINCT DES THÉORIES D'OPTIMISATION.

I.2.1. THÉORIE DE CONTENSOU [1]

Soit un système évolutif quelconque dont l'état peut être défini par un nombre fini de paramètres : nous poserons $\vec{X}$ = vecteur état = $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{V} = d\vec{X}/dt$ = « vecteur vitesse ».

Si $\vec{V}$ est une fonction univoque de $\vec{X}$ et t il n'y a pas de manœuvrabilité, chaque trajectoire est déterminée par la donnée de $\vec{X}_0$ et t_0 (exception faite des cas d'intégrales singulières).

Il y a manœuvrabilité si $\vec{V}$ peut être choisi (par l'intermédiaire d'une commande) à l'intérieur d'un certain domaine $\mathcal{D}$ (dit domaine de manœuvrabilité) de l'espace des vecteurs $\vec{V}$.

La manœuvrabilité est canonique si :

- 1°) $\mathcal{D}$ ne dépend que de $\vec{X}$ et t ,
- 2°) $\mathcal{D}$ est une fonction continue de $\vec{X}$ et de t ,
- 3°) le choix de $\vec{V}$ est entièrement libre dans $\mathcal{D}$ (en particulier $\vec{V}$ n'est astreint à aucune condition de continuité).

La manœuvrabilité peut généralement être rendue canonique lorsque l'on inclut dans $\vec{X}$ un nombre suffisant de dérivées des coordonnées d'espace (ainsi, il est fréquent que la commande soit liée au vecteur accélération, $\vec{X}$ doit alors contenir les positions et les vitesses (au sens ordinaire de ces termes).

Dans certains problèmes, la manœuvrabilité ne peut être rendue canonique, c'est en particulier le cas lorsque des fonctions aléatoires interviennent, mais ce n'est jamais le cas ici.

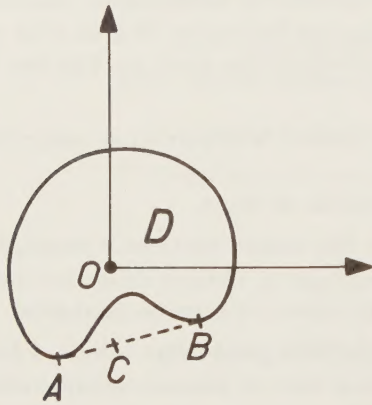


Fig. 1 - Domaine de manœuvrabilité $\mathcal{D}$.
(Maneuverability domain $\mathcal{D}$)

Le domaine de manœuvrabilité $\mathcal{D}$ est obligatoirement convexe, en effet si l'analyse des possibilités d'un système conduit à un domaine tel que celui de la figure 1, l'utilisation des points A puis B pendant des intervalles de temps dt_1 et dt_2 est équivalente à celle, pendant le temps $dt_1 + dt_2$, d'un point C sur le segment AB (ainsi un voilier louvoie pour remonter le vent).

Le point essentiel de la théorie du domaine de manœuvrabilité est le suivant : si la manœuvrabilité est canonique et si l'on veut qu'à l'instant final une certaine fonction linéaire $f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ des paramètres d'état soit maximum ou minimum, il est nécessaire (mais non suffisant) qu'à chaque instant le vecteur $\vec{V}$ soit choisi sur la frontière extérieure du domaine convexe $\mathcal{D}$, cela, que l'état final soit entièrement libre ou qu'il soit assujéti à satisfaire un certain nombre de relations linéaires entre les $x_1, x_2, \dots, x_n$, à condition bien entendu que ces relations ne fixent pas f (on peut par exemple rechercher le maximum de x_n final, les autres paramètres ayant une valeur soit libre, soit déterminée à l'instant final).

I.2.2. THÉORIE DE PONTRYAGIN [2]

Elle s'expose aisément avec le vocabulaire du paragraphe précédent.

Il faut là aussi que la manœuvrabilité soit canonique.

PONTRYAGIN utilise un vecteur adjoint :

$$\vec{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

qui dépend des conditions limites et est déterminé a posteriori, et forme l'Hamiltonien $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \vec{P} \cdot \vec{V} = p_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + p_n \frac{dx_n}{dt}.$$

Les principaux résultats obtenus par PONTYAGIN sont les suivants :

Si l'on veut qu'à l'instant final (qui est soit fixé soit non fixé), la fonction linéaire $f = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ soit minimale, il faut :

1°) Choisir à chaque instant $\vec{V}$ dans le domaine D de telle façon que $\mathcal{H}$ soit maximal (il faut donc bien choisir $\vec{V}$ (fig. 2) sur la frontière de D); D étant seulement fonction de $\vec{X}$ et t , $\mathcal{H}$ devient une fonction de $\vec{P}$, $\vec{X}$ et t .

2°) Faire vérifier au vecteur $\vec{P}$ les équations :

$$A/ \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}(\vec{P}, \vec{X}, t)}{\partial x_i}.$$

B/ au temps final :

$p_i = -a_i$ si $x_i(t_f)$ n'est pas fixé,
 p_i quelconque si $x_i(t_f)$ est fixé d'avance,

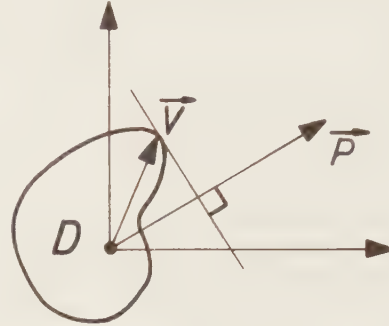


Fig. 2 - Domaine D et vecteur $\vec{P}$.
 (Domain D and vector $\vec{P}$)

nous n'examinerons pas les cas où les $x_i(t_f)$ sont liés par certaines relations linéaires car on peut toujours se ramener au cas ci-dessus par un changement linéaire des coordonnées d'état.

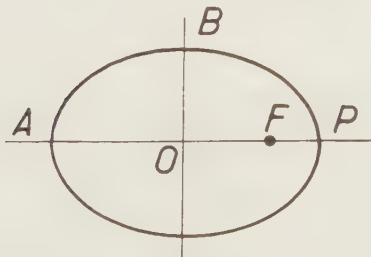
Ces deux théories ne donnent que des conditions nécessaires d'optimalité, elles se prêtent bien aux études théoriques, ce qui n'est pas le cas pour la méthode d'optimisation de BELLMANN ou celle du gradient ou encore celle du steepest-ascent que l'on utilise pour les études numériques.

La théorie d'optimisation d'EULER-LAGRANGE se prête bien entendu aux études théoriques mais elle est d'un maniement difficile lorsque le domaine de manoeuvrabilité, tel qu'il a été défini ci-dessus, présente des arêtes vives (ce qui sera souvent le cas) aussi la laisserons nous de côté.

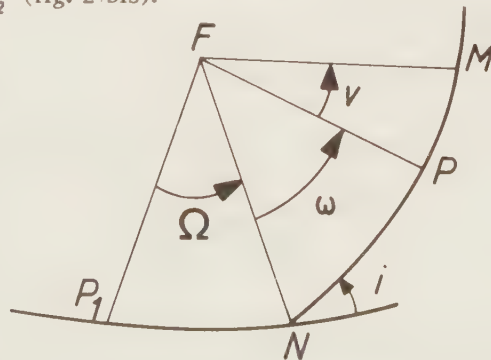
I.3. NOTATIONS.

Nous utiliserons pour plan de référence le plan de la première orbite (orienté dans le sens du mouvement) et pour direction de référence dans ce plan la direction du périégée.

La première orbite est alors entièrement définie par son demi-grand axe a_1 , et son excentricité e_1 , la seconde l'est par $a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2$ (fig. 2 bis).



$$\begin{aligned} OA = OP = FB &= a \\ OB &= b \\ FP &= P \\ FA &= A \\ \frac{OF}{a} &= e \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \omega &= \Omega + \omega \\ u &= \omega + v = (\vec{FN}, \vec{FM}) \end{aligned}$$

Fig. 2 bis - Notations.

avec :

Ω_2 = longitude du nœud ascendant de la seconde orbite,

i_2 = inclinaison du plan de la seconde orbite ($0^\circ \leq i_2 \leq 180^\circ$),

ϖ_2 = longitude du périégée de la seconde orbite.

Nous utiliserons les notations habituelles et réserverons les lettres non indicées à l'orbite "actuelle" (ou "osculatrice" ou "instantanée")

a = demi grand axe,

e = excentricité,

$b = a\sqrt{1-e^2}$ = demi petit axe,

$p = a(1 - e^2)$ = paramètre,

$P = a(1 - e)$ = distance du périégée,

$A = a(1 + e)$ = distance de l'apogée, $0 \leq P \leq p \leq b \leq a \leq A$

i = inclinaison, $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$,

Ω = longitude du nœud,

ω = argument du périégée = angle du nœud au périégée dans le sens du mouvement = argument de la latitude du périégée,

$\varpi = \Omega + \omega$ = longitude du périégée,

v = anomalie vraie,

E = anomalie excentrique,

n = moyen mouvement,

$\mu = n^2 a^3$ = constante gravitationnelle,

$u = \omega + v$ = élongation angulaire nodale = argument de la latitude,

$\vec{r}$ = rayon vecteur,

$\vec{V}$ = vecteur vitesse,

$\vec{H} = \vec{r} \wedge \vec{V}$ = vecteur moment cinétique (par unité de masse),

$\xi = -\frac{\mu}{2a} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$ = énergie (par unité de masse).

Les éléments relatifs à la fusée considérée sont :

m = masse,

$-m' = -\frac{dm}{dt}$ = débit de propulsif,

$\vec{Z}$ = vitesse d'éjection,

$\vec{F} = -m'\vec{Z}$ = force de poussée,

$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ = accélération due à la poussée des propulseurs.

(REMARQUE : si la vitesse Z est grande, la correction relativiste conduit à

$$\vec{F} = -m'\vec{Z} \frac{1}{\sqrt{1-Z^2/c^2}} \quad \vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{m'\vec{Z}}{m\sqrt{1-Z^2/c^2}} \quad).$$

I.4. ACTION D'UNE POUSSÉE DES PROPULSEURS.

Une accélération $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ provoquée par l'intermédiaire des propulseurs sera décomposée en :
 S = accélération radiale (positive vers le haut),

T = accélération horizontale dans le plan de l'orbite (positive vers l'avant),

W = accélération normale au plan de l'orbite (positive dans le sens de $\vec{H}$).

Le trièdre STW (fig. 3) est trirectangle direct.

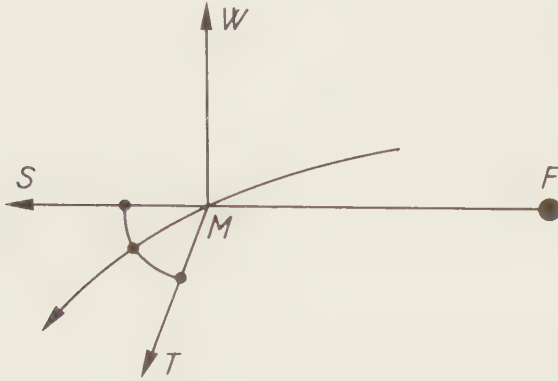


Fig. 3 - Trièdre STW .

(Tri-rectangular trihedron STW)

L'action de ces trois composantes sur les éléments osculateurs est donnée par les formules classiques :

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{\gamma} \quad \frac{d\xi}{dt} = \vec{V} \cdot \vec{\gamma}$$

donc (puisque

$$\xi = -\frac{\mu}{2a},$$

$$H = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$$

et

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = a (1 - e \cos E) :$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a}{nb} \left[S e \sin v + T (1 + e \cos v) \right] = \frac{2a^2}{\mu} \frac{d\xi}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{b}{na^2} \left[S \sin v + T (\cos v + \cos E) \right] = \frac{1}{\mu e} \left[p \frac{d\xi}{dt} - nb \frac{dH}{dt} \right]$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{Wr \cos u}{H}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{Wr \sin u}{H \sin i}.$$

On obtient de manière analogue la dérivée du cinquième paramètre d'orbite :

$$\frac{d\varpi}{dt} = (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dt} + \frac{H}{\mu e} \left[-S \cos v + T \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right].$$

On utilisera aussi les relations suivantes liées à $\frac{da}{dt}$ et $\frac{de}{dt}$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2b}{na^2} r T ; \quad \frac{dH}{dt} = r T$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{n} \left[T (2 + e \cos v - e \cos E) + S e \sin v \right] = \frac{1}{2b} \left[p \frac{da}{dt} + a \frac{dp}{dt} \right].$$

I.5. CONDITIONS D'UTILISATION OPTIMALE D'UNE FUSÉE.

Remarque préliminaire.

Une orbite elliptique correspond à un niveau d'énergie négatif.

Une orbite parabolique correspond à un niveau d'énergie nul.

Une orbite hyperbolique correspond à un niveau d'énergie positif.

D'autre part, le passage d'une orbite parabolique à une autre, demande une consommation négligeable (si la durée de transfert est indifférente) en effet une poussée infiniment petite suffit, à grande distance, pour passer sur un grand cercle et une seconde poussée analogue pour passer sur la seconde parabole, il en résulte qu'il n'y a jamais intérêt à utiliser des vitesses hyperboliques pour les transferts entre ellipses car cela exigerait deux passages par le niveau $\xi = 0$ entre lesquels nous venons de voir que la consommation peut être rendue négligeable sans que l'on ait besoin de passer sur une orbite hyperbolique.

Nous ne rencontrerons donc que des orbites elliptiques ou paraboliques.

Etudions maintenant le problème de l'utilisation optimale d'une fusée en nous servant de la théorie de PONTYAGIN.

L'état de la fusée est définie par sa masse m restante à l'instant considéré et par les six éléments orbitaux.

La commande dont nous disposons est constituée par le débit $-m'$ de propulsif et par la vitesse d'éjection $\vec{Z}$; $-m'$ et $|\vec{Z}|$ peuvent être choisis à l'intérieur d'un domaine D (fig. 4) généralement fixe ou fonction seulement de m (fusée à étages).

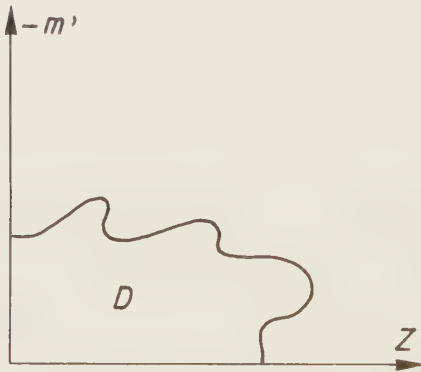


Fig. 4 - Domaine $D - (Z = |\vec{Z}|)$.

Nous supposons que :

- 1°) D est fonction seulement de m (en particulier il n'y a pas de détérioration de la fusée au cours du temps).
- 2°) On peut choisir à volonté le point $-m', Z (\equiv |\vec{Z}|)$ du domaine D sans inertie, en particulier on peut arrêter ou mettre en marche à volonté les propulseurs.
- 3°) On dispose à volonté de l'orientation de $\vec{Z}$.

En utilisant la remarque préliminaire on voit que l'on peut ranger l'anomalie vraie v parmi les paramètres de commande et non d'état; en effet, puisque les orbites osculatrices sont toujours des ellipses ou à la limite des paraboles, on peut toujours attendre, en tournant le long de l'orbite, que v ait une valeur déterminée (ce que l'on ne peut faire quand l'orbite est hyperbolique), pour allumer les propulseurs

(cela n'est pas gênant puisque le temps de transfert est indifférent).

On obtient alors :

paramètres d'état

$$m, a, e, i, \Omega, \omega.$$

paramètres de commande

$$-m', \vec{Z}, v.$$

Nous utiliserons pour paramètre de description non le temps qui est indifférent mais la masse m qui est fixe dans un état $m, a, e, i, \Omega, \omega$ fixe et qui diminue chaque fois que l'on change d'état (elle peut donc bien servir de paramètre de description)

d'où :

$$H = \frac{dt}{dm} \left(p_m m' + p_a \frac{da}{dt} + p_e \frac{de}{dt} + p_i \frac{di}{dt} + p_\Omega \frac{d\Omega}{dt} + p_\omega \frac{d\omega}{dt} \right)$$

$$H = p_m + \frac{1}{m}, \left[S f_1(v) + T f_2(v) + W f_3(v) \right]$$

les fonctions $f_1, f_2, f_3(v)$ sont des fonctions de v et d'éléments fixes (a à ω et p_a à p_ω) dans l'état considéré; posons $j(v) = \text{vecteur } f_1, f_2, f_3$

$$\chi = p_m + \frac{1}{m} \vec{\gamma} \cdot \vec{j}(v).$$

On recherche m final maximal, il faut donc à chaque instant choisir χ minimal par rapport aux commandes $-m', \vec{Z}, v$.

or
$$\frac{\vec{\gamma}}{m'} = - \frac{\vec{Z}}{m}$$

(ou bien

$$\frac{\vec{\gamma}}{m'} = - \frac{\vec{Z}}{m} \frac{1}{\sqrt{1 - Z^2/c^2}}$$

si l'on tient compte de l'effet relativiste qui n'est pas toujours négligeable car Z peut être très grand pour les propulseurs électriques).

d'où
$$\chi = p_m - \frac{\vec{Z} \cdot \vec{j}(v)}{m \sqrt{1 - Z^2/c^2}}$$

donc : 1°) v optimal s'obtient pour $|\vec{j}(v)|$ maximal,

2°) $\vec{Z}$ optimal est dirigé dans le sens de $\vec{j}(v)$ et il faut toujours choisir Z (c'est-à-dire la vitesse d'éjection) maximal.

Les conditions optimales d'utilisation d'une fusée sont donc (dans le problème étudié où le temps est indifférent) :

A. En dehors de v optimal m' est nul, le moteur est arrêté, la fusée se déplace balistiquement.

B. Pour v optimal, Z doit être maximal, on utilise donc le point d'abscisse maximale dans le domaine $\mathcal{D}$ (fig. 4), Z est donc désormais une fonction de m seul et si l'on pose :

$C =$ vitesse caractéristique :

$$C = \int_a^t \gamma dt = \int_{m_0}^m - \frac{Z dm}{m \sqrt{1 - Z^2/c^2}}$$

C est une fonction univoque et strictement décroissante de m et le maximum de m s'obtient pour le minimum de C .

On peut donc remplacer le problème posé par le suivant :

Il faut rejoindre l'orbite finale fixée en ayant respecté les conditions d'utilisation optimale de la fusée [soit m' nul, soit Z maximum ($= Z_{\max}(m)$)] et en ayant choisi le transfert de vitesse caractéristique minimale.

L'état peut alors être défini par $C, a, e, i, \Omega, \omega$ les caractéristiques propres à la fusée n'interviennent plus car $\frac{da}{dc}, \frac{de}{dc}$ etc ... ne sont fonction que de $a, e, i, \Omega, \omega, v$ et de la direction de poussée.

REMARQUE :

Il se peut que pour $Z = Z_{\max}$ ou $Z \simeq Z_{\max}$ la poussée obtenue soit très faible, l'on sera alors conduit à fractionner les arcs de poussée en petits éléments que l'on effectuera à un tour d'intervalle les uns des autres (ce qui n'est pas gênant puisque le temps est indifférent), le transfert pourra alors durer très longtemps mais l'optimum pour la consommation de masse n'est pas changé pour autant.

CONSIDÉRATIONS PRATIQUES.

Les solutions optimales théoriques comportent toujours, comme nous le verrons, uniquement des impulsions séparées par des arcs balistiques, il n'y a pas d'arcs de poussée continue, or, dans la pratique, les fusées ne peuvent fournir des impulsions et cependant les transferts doivent être effectués en un temps fini, on est donc conduit à adopter une solution voisine de l'optimum : les impulsions sont remplacées par un ou plusieurs arcs de poussée (s'il y en a plusieurs, ils sont effectués à un tour d'intervalle les uns des autres), ces arcs de poussée sont évidemment effectués au voisinage du point théorique d'impulsion, la perte qui en résulte reste faible :

Si une impulsion effectuée à une distance r du centre attractif est remplacée par un arc de poussée de durée τ disposé optimalement (et le long duquel $|\vec{y}|$ est supposée fixe), la perte relative (en vitesse caractéristique) est (Cf. chap. V,2) toujours inférieure ou égale à :

$$\frac{\mu \tau^2}{24 r^3} = \frac{\pi^2}{6} \frac{\tau^2}{T^2}$$

(T étant la période de révolution d'un satellite d'orbite circulaire à l'altitude r).

Si $|\vec{y}|$ est variable dans le rapport 1 à $1 + \epsilon$ au cours de la durée τ la perte relative monte au maximum à :

$$\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\tau^2}{T^2} \cdot \left[\max \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ de } \frac{1 + \epsilon(1-x^3)}{1 + \epsilon(1-x)} \right].$$

On peut remarquer que :

$$\left[\max \text{ pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ de } \frac{1 + \epsilon(1-x^3)}{1 + \epsilon(1-x)} \right]$$

est toujours inférieur à

$$1 + \frac{2\epsilon}{9} \sqrt{3}$$

et à 3 (obtenu pour $\epsilon = +\infty$).

Ainsi, pour des satellites de la terre, si $\tau \ll 2$ minutes et si $\epsilon \ll 20\%$, la perte relative, en vitesse caractéristique, reste toujours inférieure à un millième.



II - DEUXIÈME PARTIE

II,1. NOUVELLE DÉFINITION DU CARACTÈRE OPTIMAL DU TRANSFERT.

L'étude est faite dans le cas du champ Newtonien central.

Au temps $t_1 = 0$ un mobile est sur une orbite déterminée (elliptique ou parabolique) on veut qu'au temps $t_2 \ll +\infty$ il soit sur une autre orbite donnée d'avance *en ayant choisi le transfert de vitesse caractéristique minimale*.

Ce transfert correspond à l'optimum de la consommation de masse de propulsif si l'on prend soin de se placer dans les conditions d'utilisation optimale de la fusée : soit moteur arrêté, soit vitesse d'éjection maximale selon les instants.

Nous savons déjà que :

1°) Le problème du rendez-vous se ramène immédiatement à celui du transfert simple qui sera donc seul considéré ici.

2°) Il n'y a jamais intérêt à utiliser de vitesses hyperboliques (la vitesse caractéristique de transfert étant négligeable entre deux paraboles).

3°) Le problème est indépendant des caractéristiques de la fusée, l'état sera donc défini par $C, a, e, i, \Omega, \varpi$ et la commande par v (définissant l'endroit de l'orbite où l'on allume le propulseur) et S_1, T_1, W_1 cosinus directeurs de la direction de poussée.

II,2. ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

L'état du mobile est défini par les paramètres $C, a, e, i, \Omega, \varpi$.

$C = \int_0^t \gamma dt$ = vitesse caractéristique depuis l'instant $t = 0$ est non décroissant et peut servir de paramètre de description.

On peut donc éliminer le temps, on obtient alors (à partir des équations du chap. I,4) :

$$\frac{da}{dC} = \frac{2a}{nb} \left[S_1 e \sin v + T_1 (1 + e \cos v) \right] = \frac{2a^2}{\mu} \frac{d\xi}{dC}$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{b}{na^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right]$$

$$\frac{di}{dC} = \frac{W_1 r \cos u}{H}$$

$$\frac{d\Omega}{dC} = \frac{W_1 r \sin u}{H \sin i}$$

$$\frac{d\varpi}{dC} = (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dC} + \frac{H}{\mu e} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]$$

et de même :

$$\frac{dp}{dC} = \frac{2b}{na^2} r T_1 ; \frac{dH}{dC} = r T_1 ; \frac{db}{dC} = \frac{1}{n} \left[S_1 e \sin v + T_1 (2 + e \cos v - e \cos E) \right]$$

avec : v (ou E) : définissant le point de l'orbite où l'on allume le propulseur et : $S_1 = \frac{S}{\gamma}$; $T_1 = \frac{T}{\gamma}$;

$W_1 = \frac{W}{\gamma}$: cosinus directeurs de la direction de poussée.

S , T , W et γ ne seront plus utilisés.

On veut trouver le transfert permettant d'aller de l'état initial : a_1 ; e_1 ; $i_1 = 0$; $\Omega_1 = 0$; $\varpi_1 = 0$; $C_1 = 0$ à l'orbite finale a_2 , e_2 , i_2 , Ω_2 , ϖ_2 avec C_2 minimum.

Tel qu'il est, le problème est encore bien compliqué; on peut toutefois remarquer que la manoeuvrabilité est canonique avec les paramètres d'état C , a , e , i , Ω , ϖ et les paramètres de commande v , S_1 , T_1 , W_1 .

Nous allons tout d'abord traiter quelques cas simples.

II.3. RECHERCHE DE SOUS-SYSTÈMES INDÉPENDANTS.

La manoeuvrabilité est-elle canonique vis à vis d'un nombre plus restreint de paramètres d'état ?

Les équations $\frac{da}{dC}$ à $\frac{d\varpi}{dC}$ du chapitre II,2 précédent font toutes intervenir les paramètres a et e directement et par l'intermédiaire de $b = a \sqrt{1 - e^2}$; $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$; $H = n a b$), ces deux paramètres doivent donc obligatoirement faire partie des paramètres utiles dans tout sous-système indépendant.

Les paramètres d'orientation i , Ω et ϖ n'interviennent que dans $\frac{di}{dC}$, $\frac{d\Omega}{dC}$, $\frac{d\varpi}{dC}$ où l'on ne peut les séparer (on ne peut pas non plus effectuer une séparation en choisissant d'autres paramètres d'orientation); le seul sous-système indépendant est donc celui relatif aux paramètres C , a et e .

D'où le problème suivant a_1 , e_1 , a_2 , e_2 sont donnés, i_2 , Ω_2 , ϖ_2 sont indifférents; quel est le transfert optimal ?

Ce problème va conduire aux transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires ($i_2 = \varpi_2 = 0$).

II.4. ÉTUDE DU SOUS-SYSTÈME INDÉPENDANT.

(Transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires).

Les seuls paramètres étudiés sont C , a et e (ou bien C , b et e ce qui revient au même par l'intermédiaire de $b = a \sqrt{1 - e^2}$).

Nous poserons :

Paramètres d'état b , e , C .

Paramètres de commande v , S_1 , T_1 , W_1 .

Etat initial : b_1 , e_1 , $C_1 = 0$. Orbite finale : b_2 , e_2 . On veut trouver le transfert pour lequel C_2 est minimal.

Les équations du problème sont :

$$\begin{aligned} \frac{db}{dC} &= \frac{1}{n} \left[S_1 e \sin v + T_1 (2 + e \cos v - e \cos E) \right] \\ \frac{de}{dC} &= \frac{b}{na^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right] \end{aligned}$$

Soient : p_b, p_e, p_c les paramètres de PONTYAGIN associés à b, e, C ; on forme l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = p_b \frac{db}{dC} + p_e \frac{de}{dC} + p_c \frac{dC}{dC}$$

soit :

$$\mathcal{H} = \frac{p_b}{n} \left[S_1 e \sin v + T_1 (2 + e \cos v - e \cos E) \right] + \frac{b p_e}{n a^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right] + p_c$$

on veut C final minimum, il faut donc prendre $\mathcal{H}$ maximum par rapport aux commandes v, S_1, T_1 , W_1 (avec $S_1^2 + T_1^2 + W_1^2 = 1$) il faut donc visiblement $W_1 = 0$ et $S_1^2 + T_1^2 = 1$ posons $S_1 = \sin \varphi$ et $T_1 = \cos \varphi$ (la poussée est dans le plan d'orbite, φ est l'angle (positif vers le haut) de la direction de poussée avec l'horizontale avant).

D'où :

$$\mathcal{H} = \frac{p_b}{n} \left[\cos \varphi (2 - e \cos E) + e \cos (v - \varphi) \right] + \frac{b p_e}{n a^2} \left[\cos (v - \varphi) + \cos E \cos \varphi \right] + p_c$$

Le second crochet est manifestement maximal (il vaut +2) pour $v = E = \varphi = 0$ ou π et il est minimal (il vaut -2) pour $v = E = \varphi + \pi = 0$ ou π .

Etudions le premier crochet, il vaut B avec :

$$B = \cos \varphi (2 - e \cos E + e \cos v) + e \sin v \cdot \sin \varphi$$

posons :

$$\left. \begin{aligned} 2 - e \cos E + e \cos v &= \alpha \cos \varphi \\ e \sin v &= \alpha \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ avec } \alpha \geq 0$$

d'où

$$B = \alpha \cos (\psi - \varphi)$$

B est maximal pour α maximal et

$$\varphi = \psi$$

B est minimal pour α maximal et

$$\varphi = \psi + \pi$$

étudions donc α

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= e^2 \sin^2 v + [2 - e \cos E + e \cos v]^2 \\ \alpha^2 &= 3 - e^2 + 2 e \cos v + (1 - e \cos E)^2 \\ &= 1 - e^2 + \frac{2p}{r} + \frac{r^2}{a^2} \end{aligned}$$

α^2 est maximal pour r minimal ou maximal c'est-à-dire $r = P$ ou $r = A$, on trouve dans les deux cas $\alpha^2 = 4$ donc :

Le premier crochet, égal à B , est maximal (il vaut +2) pour $\varphi = 0$; $v = E = 0$ ou π et il est minimal (il vaut -2) pour $\varphi = \pi$; $v = E = 0$ ou π .

D'où la maximisation de $\mathcal{H}$ par rapport aux commandes (v et φ) :

$$\mathcal{H} = \left| \frac{2 p_b}{n} \right| + \left| \frac{2 b p_e}{n a^2} \right| + p_c$$

avec

$$\cos \varphi = \operatorname{sgn} p_b \quad \text{et} \quad \cos v = \operatorname{sgn} p_b \cdot p_e$$

D'où ces premiers résultats : les poussées optimales ont lieu soit au périégée soit à l'apogée ($\cos v = \pm 1$), elles y sont tangentielles ($W_1 = 0$, $\cos \varphi = \pm 1$), elles conduisent donc à une ellipse finale coaxiale et coplanaire à l'ellipse initiale.

ÉTUDE DES COMMUTATIONS (c'est-à-dire des discontinuités dans la valeur optimale de v).

$$\frac{dp_b}{dC} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b} = - \frac{3 |p_b|}{n b} - \frac{|p_e|}{n a^2} \leq 0$$

p_b est toujours décroissant

$$\frac{dp_e}{dC} = -\frac{\partial H}{\partial e} - \frac{e|p_e|}{nb} - \frac{3\alpha^2 e|p_b|}{nb^2}$$

p_e ne peut changer de signe en s'annulant que dans le sens décroissant.

D'autre part :

$$\frac{dH}{dC} = \frac{\partial H}{\partial C} = 0$$

$$\frac{dp_c}{dC} = -\frac{\partial H}{\partial C} = 0$$

H et p_c sont constants ainsi donc que :

$$H - p_c = \left| \frac{2p_b}{n} \right| + \left| \frac{2bp_e}{na^2} \right|$$

donc p_b et p_e restent finis à moins que l'on ait à un moment du transfert $n = +\infty$ ou bien $p = 0$ (cas plus général) ce qui nous le verrons est exclu.

p_b et p_e étant finis et continus ne peuvent changer de signe qu'en s'annulant et alors obligatoirement dans le sens décroissant donc au plus une fois chacun, il y a donc au plus trois phases dans le transfert :

$$\begin{aligned} 1^\circ) p_b > 0 \text{ et } p_e > 0 \quad \cos v = \operatorname{sgn} p_b p_e = +1 : v = 0 \\ \cos \varphi = \operatorname{sgn} p_b = +1 : \varphi = 0 \end{aligned}$$

la première phase est une poussée tangentielle au périégée, e est croissant.

$$\begin{aligned} 2^\circ) p_b p_e < 0; p_b \gtrless 0 \text{ selon que } p_b \text{ ou } p_e \text{ s'annule en premier :} \\ \cos v = -1 : v = \pi \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \pm 1 : \varphi = 0 \text{ ou } \pi$$

la seconde phase est une poussée ou un freinage tangential en l'apogée, e croît ou décroît selon le signe de $\cos \varphi$.

$$\begin{aligned} 3^\circ) p_b < 0 \text{ et } p_e < 0 \quad \cos v = +1 : v = 0 \\ \cos \varphi = -1 : \varphi = \pi \end{aligned}$$

la troisième phase est un freinage tangential au périégée, e décroît.

$e \gg \min [e_1; e_2]$; e n'est jamais nul au cours du transfert (cela indique en particulier que l'ellipse finale a le périégée du même côté de la masse attirante que l'ellipse initiale, elles sont coaxiales directes).

Les trois phases ainsi décrites ne font pas varier la direction du grand axe, elles ont donc lieu chacune en un point fixe, ces poussées ou freinages sont donc des impulsions (décomposables si les propulseurs l'exigent en un grand nombre de petites impulsions effectuées à un tour d'intervalle), portons sur un diagramme périégée-apogée l'influence de ces trois impulsions, elles correspondent respectivement aux segments JK, KL, LM (fig. 5).

Il reste à déterminer l'ordonnée intermédiaire A , cherchons donc la dérivée de la vitesse caractéristique totale C_2 par rapport à A :

Nous supposons $P_1 \ll P_2$ ce que l'on peut toujours faire, les transferts étant réversibles. Dans ce cas :

$$C_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{AP_1(A+P_1)}} (A-P_1) - \sqrt{\frac{2\mu A_1}{P_1(A_1+P_1)}} + \sqrt{\frac{2\mu(A+P_2)}{AP_2}} - \sqrt{\frac{2\mu A_2}{P_2(A_2+P_2)}}$$

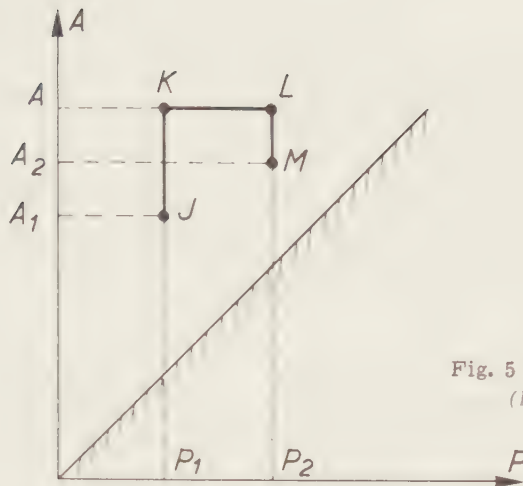


Fig. 5 - Diagramme périgée-apogée.
(Perigee-apogee diagram)

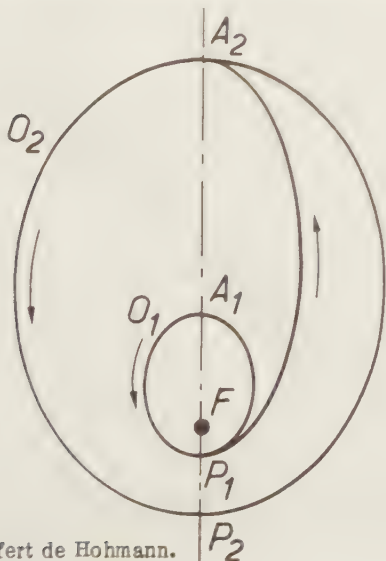
$$\frac{dC_2}{dA} = \sqrt{\frac{\mu}{2A^3}} \left[\frac{3A + P_1}{A + P_1} \sqrt{\frac{P_1}{A + P_1}} - \sqrt{\frac{P_2}{A + P_2}} \right]$$

$$\text{sgn} \frac{dC_2}{dA} = \text{sgn} \left[A^2(9P_1 - P_2) + 6A(P_1^2 + P_1P_2) + P_1^2(3P_2 + P_1) \right]$$

d'où : 1 ) si $9P_1 > P_2$: $\frac{dC_2}{dA} > 0$, la valeur optimale de A est obtenue pour A minimum ($= \max(A_1, A_2)$)

l'une des trois impulsions disparaît, on obtient le transfert de HOHMANN par une ellipse bi-tangente en l'apogée le plus élevé et au périgée de l'autre orbite (points où se font les deux impulsions).

2 ) si $9P_1 < P_2$: $\frac{dC_2}{dA}$ est négatif pour A grand et change au plus une fois de signe, la valeur optimale de A est soit A minimum (transfert ci-dessus de HOHMANN) soit A maximum c'est-à-dire infini, on obtient ainsi comme seconde possibilité le "transfert par l'infini" utilisant deux paraboles ou quasi-paraboles tangentes respectivement en chacun des périgées et raccordées à grande distance par une ou deux impulsions infiniment petites (fig. 6).



Transfert de Hohmann.
(Hohmann transfer)

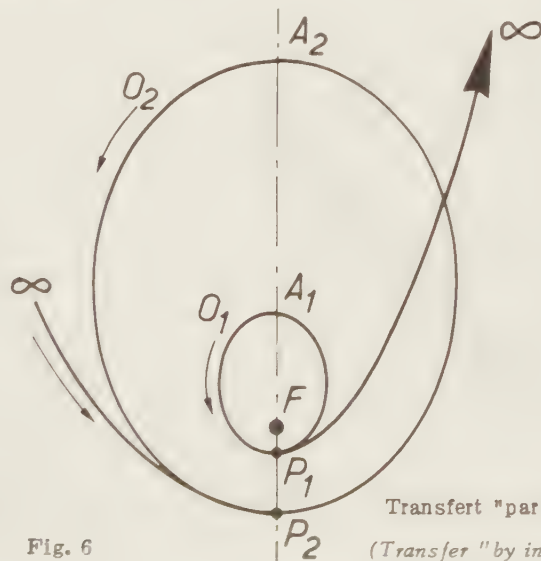


Fig. 6

Transfert "par l'infini".
(Transfer "by infinity" or
"bi-parabolic transfer")

REMARQUE :

nous avons dit qu'il fallait exclure les cas où n serait infini ou bien p nul au cours du transfert, utilisons pour le démontrer un diagramme périégée-apogée (fig. 7)

n infini correspond à $A=P=0$.

p nul correspond à $P=0$.

Prouvons donc qu'un contour tel que $JKLMNO$ qui comporte une partie (LM) sur l'axe $P=0$ ne peut être optimal; il suffit pour cela de voir que $QLMR$ est d'une vitesse caractéristique supérieure à QR , or, on peut voir immédiatement que QL est d'une vitesse caractéristique supérieure au double de celle de $Q\infty$ elle-même supérieure à celle de QR :

$$C_{QL} = \sqrt{\frac{2\mu P_Q}{A_Q(P_Q + A_Q)}} ; C_{Q\infty} = \sqrt{\frac{2\mu}{P_Q}} - \sqrt{\frac{2\mu A_Q}{P_Q(A_Q + P_Q)}}$$

$$\frac{C_{Q\infty}}{C_{QL}} = \frac{\sqrt{A_Q(A_Q + P_Q)} - A_Q}{P_Q} \leq \frac{1}{2}$$

donc, sans préjudice d'autres objections tel que le choc avec la planète attirante, ces cas sont à écarter et il ne reste bien que les deux sortes de solutions trouvées : le transfert de HOHMANN et le transfert "par l'infini".

Il nous reste, pour achever cette étude, à étudier laquelle de ces deux solutions doit être choisie.

Nous supposons encore, en utilisant au besoin la réversibilité, que $P_1 < P_2$.

Nous savons déjà que si $gP_1 \gg P_2$ le transfert optimal est celui de HOHMANN.

Si $gP_1 < P_2$ il faut comparer les deux solutions, on voit déjà (fig. 8), en supprimant les parties communes aux deux transferts, que la position de l'apogée le plus bas n'intervient pas dans la comparaison.

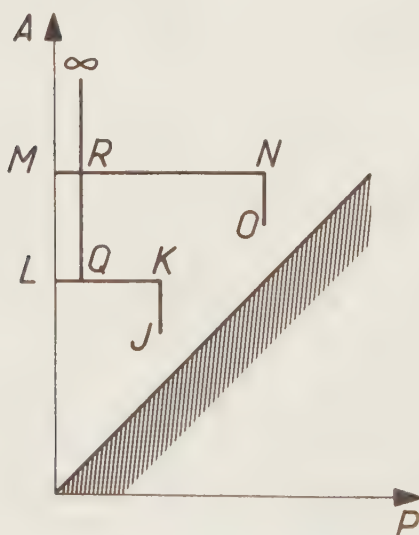


Fig. 7 - Etude pour $p = 0$.

(Study for $p = 0$)

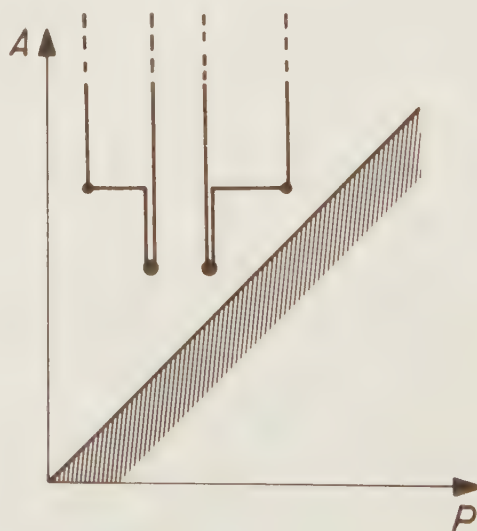


Fig. 8 - Comparaison des deux modes de transfert.

(Comparison between the two types of transfer)

Posons donc

$$A = \max (A_1, A_2).$$

Il faut comparer

$$\sqrt{\frac{2\mu P_2}{A(A+P_2)}} - \sqrt{\frac{2\mu P_1}{A(A+P_1)}}$$

pour le transfert de HOHMANN et

$$\sqrt{\frac{2\mu}{P_2}} - \sqrt{\frac{2\mu A}{P_2(A+P_2)}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_1}} - \sqrt{\frac{2\mu A}{P_1(A+P_1)}}$$

pour le transfert "par l'infini".

On obtient ainsi :

pour $\frac{P_2}{A} = 0$	le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ limite est	9
pour " $= 1/3$	le rapport " limite est	10,056
pour " $= 2/3$	le rapport " limite est	11,028
pour " $= 1$	le rapport " limite est	11,938

(en particulier entre cercles le rapport limite (rapport des rayons) est 11,938).

Si $\frac{P_2}{P_1}$ est supérieur au rapport limite, le transfert optimal est "par l'infini", sinon, il est de HOHMANN.

On peut ainsi construire le graphique de la figure 9.

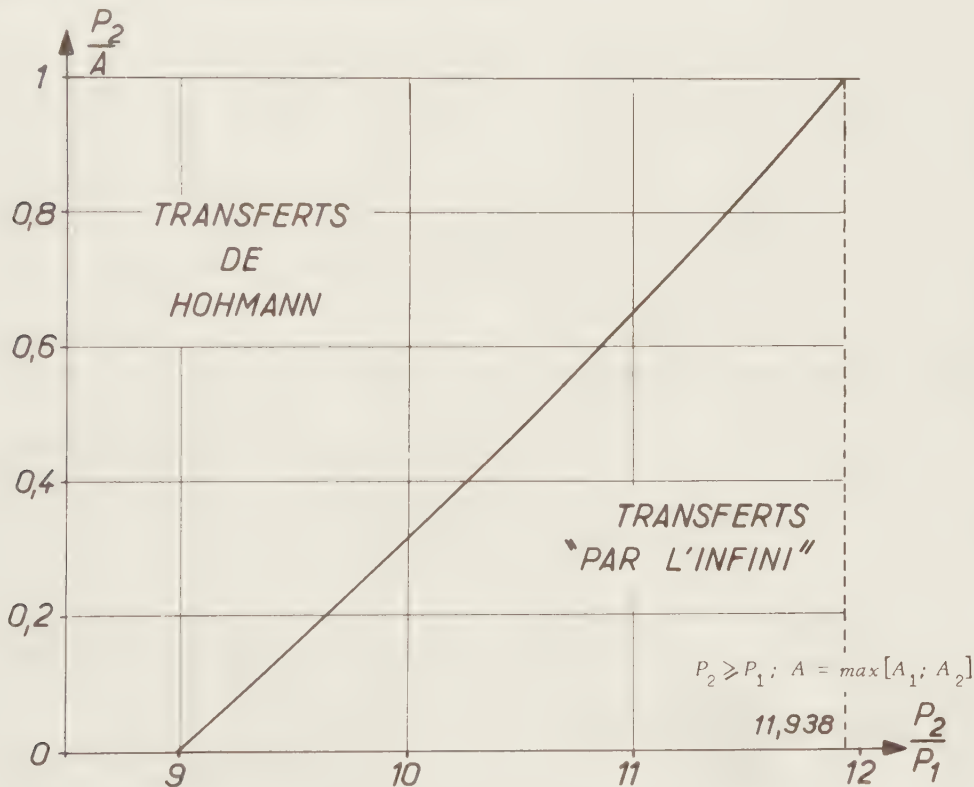


Fig. 9 - Comparaison des transferts "de Hohmann" et "par l'infini"

(Comparison between the "Hohmann transfer" and the "bi-parabolic transfer")

$\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ est en abscisse (en supposant $P_1 < P_2$), $\left(\frac{P_2}{A}\right)$ est en ordonnée ($A = \max(A_1; A_2)$).

Si $\frac{P_2}{P_1}$ est supérieur à 11,938, le transfert optimal est toujours "par l'infini".

II,4.1. CONSIDÉRATIONS PRATIQUES SUR LES TRANSFERTS ENTRE ORBITES COPLANAIRES ET COAXIALES DIRECTES.

On peut faire les remarques suivantes :

1°) Les cas de transferts optimaux "par l'infini" sont pratiquement assez rares, de plus ils sont plus compliqués et surtout bien plus longs que les transferts de HOHMANN (puisque de durée infinie ou au moins très élevée), enfin ils ne présentent pas généralement une économie de vitesse caractéristique très élevée par rapport à ceux-ci :

L'étude complète des vitesses caractéristiques conduit au résultat suivant : le supplément dû à l'utilisation du transfert de HOHMANN est toujours inférieur à (en supposant $P_1 < P_2$) :

$$2,2640 \dots \approx (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) (\sqrt{2} - 0,088)$$

$$\frac{8,8\%}{1 - 2,2640 (\sqrt{1 + e_1} - 1)}$$

soit 8,8% si $e_1 = 0$, 18% si $e_1 = 1/2$.

Mais il est vrai : 141,4% ($=\sqrt{2}$) si $e_1 \approx 1$ (cas du transfert entre une ellipse presque plate et une autre presque ronde de même apogée ou extérieure).

Donc, sauf exception, le transfert de HOHMANN représente la solution pratique du transfert optimal entre orbites coplanaires et coaxiales directes.

2°) Le transfert de HOHMANN est d'autant plus coûteux que l'on est plus près du centre attractif : descendre d'un cercle de rayon 1 à un cercle de rayon 1/4 coûte deux fois plus (en vitesse caractéristique) que monter du cercle de rayon 1 à un cercle de rayon 4; le transfert vers l'orbite de Mercure coûte plus que ceux vers n'importe quelle autre orbite de planète (il n'en est pas de même pour les transferts vers les planètes elles-mêmes car Mercure a une faible vitesse de libération).

3°) Le transfert optimal entre deux paraboles ayant toujours une vitesse caractéristique nulle, on en déduit le transfert optimal entre une ellipse et une parabole d'orientations quelconques : il commence comme le début d'un passage "par l'infini" et se termine par le transfert de coût négligeable entre les deux paraboles.

4°) Si le propulseur de la fusée considérée est capable de fournir des impulsions ou des quasi-impulsions importantes, le transfert hyperbole-parabole est simple et évident (fig. 10) :

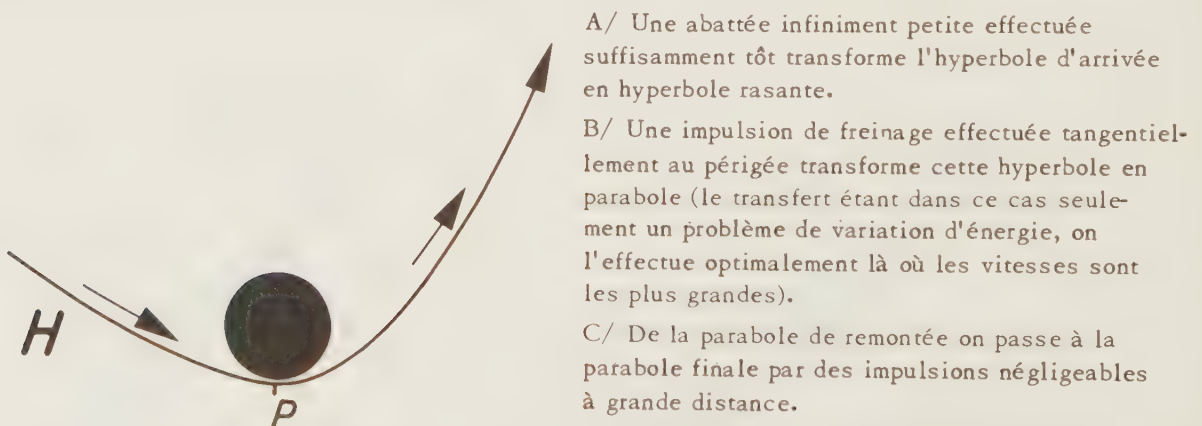


Fig. 10 - Transfert hyperbole-parabole.
(Hyperbola-parabola transfer)

est pas de même pour les transferts hyperbole-hyperbole ou ceux ellipse-ellipse.

On obtient ainsi les transferts hyperbole-parabole et en les composant avec les transferts paraboles-ellipse on obtient les transferts optimaux hyperbole-ellipse sans difficulté ... il n'en

5°) Puisque nous avons étudié le sous-système indépendant b, e, C (ou a, e, C) en considérant i_2, Ω_2 et ω_2 comme indifférent, il va de soi que si i_2, Ω_2 et ω_2 n'ont pas les valeurs optimales correspondant au cas coplanaire et coaxial direct (c'est-à-dire $i_2 = 0, \omega_2 = 0, \Omega_2$ quelconque) le transfert optimal $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2$ aura une vitesse caractéristique supérieure ou égale à celle du transfert optimal $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, 0, \dots, 0$ (transfert coplanaire et coaxial direct correspondant) d'autre part, les transferts "par l'infini" sont indépendants de l'orientation (puisque les transferts entre paraboles quelconques sont d'une vitesse caractéristique négligeable) donc si nous posons :

C_2 = vitesse caractéristique du transfert optimal $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2$

C_H = vitesse caractéristique du transfert de HOHMANN $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, 0, \dots, 0$

C_∞ = vitesse caractéristique du transfert "par l'infini" $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, \dots, \dots, \dots$

Nous obtiendrons toujours :

$$\min [C_H, C_\infty] \leq C_2 \leq C_\infty.$$

Donc, si $C_H \gg C_\infty$ c'est-à-dire si P_1, P_2 et $A = \max(A_1; A_2)$ correspondent à un point de la zone de droite (fig. 9) nous avons toujours :

$$C_2 = C_\infty \equiv \left\{ \sqrt{\frac{2\mu}{P_1}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}} \right\} \quad \text{vitesse toujours comprise entre 41,42 \% et 50 \% de la somme des vitesses d'apogée}$$

et le transfert $a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \omega_2$ est optimal "par l'infini" quels que soient i_2, Ω_2, ω_2 .

En particulier, la condition $\frac{P_1}{P_2}$ ou $\frac{P_2}{P_1} > 11,938$ est une condition suffisante d'optimalité du transfert "par l'infini".

II.5. MISE EN ÉVIDENCE DE LA SIMPLICITÉ DES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COAXIALES DIRECTES.

Ce cas inclut tous les transferts entre orbites circulaires.

ANALYSE DU DOMAINE DE MANOEUVRABILITÉ.

Si nous nous intéressons aux seuls paramètres suivants :

$b (= a\sqrt{1-e^2}), e, C$ et L = longueur de la courbe sphérique décrite par $\frac{\vec{H}}{H}$. La manoeuvrabilité est alors canonique en fonction de ces seuls paramètres, en effet on a :

$$\frac{db}{dC} = \frac{1}{n} \left[S_1 e \sin v + T_1 (2 + e \cos v - e \cos E) \right]$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{b}{n a^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right]$$

$$\text{enfin de :} \quad \frac{di}{dC} = \frac{W_1 r \cos u}{H} \quad ; \quad \frac{d\Omega}{dC} = \frac{W_1 r \sin u}{H \sin i}$$

$$\text{on tire :} \quad \frac{dL}{dC} = \left| \frac{W_1 r}{H} \right|$$

$\frac{db}{dC}$, $\frac{de}{dC}$ et $\frac{dL}{dC}$ ne dépendent que de e et b grâce à $b = a\sqrt{1-e^2}$, $n^2 a^3 = \mu$, $H = n a b$ et des paramètres de commande v , S_1 , T_1 , W_1 .

Nous allons donc définir l'état par b , e , L et C .

Soient : p_b , p_e , p_L , p_C les paramètres de PONTYAGIN associés à b , e , L et C , on forme l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = p_b \frac{db}{dC} + p_e \frac{de}{dC} + p_L \frac{dL}{dC} + p_C \frac{dC}{dC}.$$

On veut C final minimal, il faut donc prendre $\mathcal{H}$ maximal par rapport aux commandes v , S_1 , T_1 , W_1 (avec $S_1^2 + T_1^2 + W_1^2 = 1$).

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{p_b}{n} \left[S_1 e \sin v + T_1 (2 + e \cos v - e \cos E) \right] \\ & + \frac{p_e b}{n a^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right] + p_L \left| \frac{W_1 r}{H} \right| + p_C. \end{aligned}$$

Nous savons déjà (chap. II,4) par l'analyse du sous-système indépendant que le maximum des deux premiers termes est obtenu pour $S_1 = W_1 = 0$, $T_1 = \text{sgn } p_b$, $v = 0$ ou π ($\cos v = \text{sgn } p_b p_e$) c'est-à-dire pour des poussées tangentielles en l'un des sommets du grand axe, ces poussées correspondent visiblement au maximum de :

$$p_C + p_L \left| \frac{W_1 r}{H} \right| \quad \text{si } p_L \leq 0,$$

(ce maximum est alors égal à p_C), nous avons donc ainsi le maximum de $\mathcal{H}$ si $p_L \leq 0$, il nous reste à étudier le cas $p_L > 0$.

Posons pour simplifier :

$$\frac{p_b}{n} = X; \quad \frac{p_e b}{n a^2} = Y; \quad \frac{p_L a}{H} = Z \geq 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} - p_C = & T_1 \left[X(2 + e \cos v - e \cos E) + Y(\cos v + \cos E) \right] \\ & + S_1 \left[X e \sin v + Y \sin v \right] \\ & + |W_1| Z \frac{r}{a} \end{aligned}$$

posons

$$\alpha = X \left[2 + e \cos v - e \cos E \right] + Y(\cos v + \cos E)$$

$$\beta = \sin v (Y + eX)$$

$$\gamma = Z \frac{r}{a} \geq 0$$

donc

$$X_1 = \alpha T_1 + \beta S_1 + \gamma |W_1| \text{ or } S_1^2 + T_1^2 + W_1^2 = 1$$

le maximum de X_1 , et donc de X , est obtenu pour :

$$1^\circ) \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \text{ maximum}$$

$$2^\circ) \quad \frac{\alpha}{T_1} = \frac{\beta}{S_1} = \frac{\gamma}{|W_1|} \geq 0$$

étudions donc

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

utilisons

$$\cos v = \frac{p-r}{er} ; \cos E = \frac{a-r}{ea}.$$

Nous obtenons :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (1-e^2) \left[X^2 - \frac{2XY}{e} - \frac{3Y^2}{e^2} \right] + \frac{2p}{r} \left(X + \frac{Y}{e} \right)^2 + \frac{r^2}{a^2} \left[Z^2 + \left(X - \frac{Y^2}{e} \right)^2 \right]$$

les coefficients de $\left(\frac{2p}{r}\right)$ et de $\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$ étant fixes et positifs et le reste étant constant le maximum

de $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ est obtenu soit pour r maximal ($= A$) soit pour r minimal ($= P$) en comparant ces deux cas on obtient immédiatement :

pour v optimal :

$$\cos v = \operatorname{sgn}(4XY - eZ^2)$$

pour S_1, T_1, W_1 optimaux :

$$\frac{T_1}{2X + 2Y \cos v} = \frac{S_1}{0} = \frac{|W_1|}{Z \frac{r}{a}} \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on dispose du signe de } W_1, \\ \text{on dispose du signe de } Z \end{array} \right.$$

donc $S_1 \equiv 0$ et d'autre part si $\cos v = +1$: XY est positif et donc $\operatorname{sgn} T_1 = \operatorname{sgn} X = \operatorname{sgn} Y$.

D'où ces premiers résultats :

Si l'on s'intéresse aux seuls paramètres b, e, L et C les poussées optimales sont toujours effectuées :

1°) en l'un des sommets du grand axe ($\cos v = \pm 1$),

2°) dans le plan horizontal local (plan perpendiculaire au rayon vecteur : $S_1 \equiv 0$).

De telles poussées ne changent pas la direction du grand axe, l'ellipse finale est donc coaxiale à l'ellipse initiale. Si l'on choisit le signe de W_1 (dont on peut disposer), de façon à avoir toujours

$\frac{di}{dC} \gg 0$ on obtient alors $di = dL$ au lieu de $|di| \ll dL$ et donc $i \equiv L$ car $\frac{\vec{H}}{H}$ reste alors dans le plan fixe perpendiculaire à la direction fixe de grand axe et le sens de son déplacement est constant, d'où :

$A : a_1, e_1, a_2, e_2$ et i_2 fixés (donc $L_2 \gg i_2$) le transfert optimal est obtenu entre orbites coaxiales (avec $L_2 = i_2$), les poussées sont toutes horizontales et effectuées en l'une ou l'autre des extrémités du grand axe.

REMARQUE :

les poussées étant effectuées en l'une ou l'autre des extrémités du grand axe et celui-ci étant de direction fixe les poussées ont lieu en un *point fixe* ce sont donc des *impulsions* (décomposables selon le principe général si les propulseurs l'exigent).

ÉTUDE DES COMMUTATIONS

$$\cos v = \operatorname{sgn} (4XY - eZ^2)$$

donc :

$$\cos v = \operatorname{sgn} [4p_b p_e b(1-e^2) - e p_L^2]$$

posons

$$F = 4p_b p_e b(1-e^2) - e p_L^2$$

et cherchons les variations de F en posant pour simplifier $T_1 = \cos \psi$; $W_1 = \sin \psi$

$$\frac{dp_b}{dC} = - \frac{\partial H}{\partial b} = - \frac{3p_b \cos \psi}{nb} - \frac{p_e \cos v \cos \psi}{n a^2} - \frac{r p_L |\sin \psi|}{2 n a b^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_e}{dC} = - \frac{\partial H}{\partial e} = & \frac{e p_e \cos v \cos \psi}{nb} - \frac{3a^2 e p_b \cos \psi}{nb^2} + \\ & + \frac{p_L |\sin \psi| \cos v}{nb} - \frac{3er p_L |\sin \psi|}{2 n a b(1-e^2)} \end{aligned}$$

$$\frac{dp_L}{dC} = - \frac{\partial H}{\partial L} = 0$$

p_L est constant donc p_L est positif pour les transferts non coplanaires (car sinon :

$$\frac{db}{dC} = \frac{2 \cos \psi}{n}$$

$$p_L \leq 0 \Rightarrow W_1 \equiv 0, i \equiv 0)$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{2b}{n a^2} \cos v \cos \psi \quad \text{avec} \quad \cos v = \operatorname{sgn} F$$

et d'autre part

$$1^\circ) \quad \frac{dH}{dC} = \frac{\partial H}{\partial C} = 0,$$

H est constant et même nul puisque le problème

est un problème de "temps minimal" (C jouant le rôle du temps).

$$2^\circ) \quad \frac{dp_c}{dC} = - \frac{\partial H}{\partial C} = 0, \quad p_c \text{ est constant, or } p_c \text{ final} = -1 \text{ (puisque l'on recherche le}$$

minimum de C_2) donc $p_c \equiv -1$.

$$3^\circ) \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \quad \text{puisque } H \text{ est maximum par rapport à la commande } \psi \text{ d'où :}$$

$$\frac{dF}{dC} = -2p_e(1-e^2) - 6p_b e b - 2p_L(1-e^2) \left[\frac{e p_L \cos \psi}{n b} + \frac{2b}{n a^2} p_e |\sin \psi| \right]$$

or

$$F = 4 p_e p_b (1-e^2) b - e p_L^2$$

examinons le cas $F > 0$ (donc $\cos \psi = +1$) dans ce cas $p_e \cdot p_b$ est positif, X et Y sont du signe de p_e et p_b et nous avons vu qu'il en est de même de T_1 ($= \cos \psi$) donc si $F > 0$, p_e, p_b, X, Y et $\cos \psi$ sont d'un même signe, d'autre part p_L est positif lorsque les orbites initiale et finale sont non coplanaires (afin de pouvoir avoir $W_1 \neq 0$) il en résulte que pour $F > 0$, $\frac{dF}{dC}$ est du signe de $(-p_e)$.

Or $X - p_L \equiv 1$ est constant, p_b et p_e qui sont continus, restent donc finis (car p n'est jamais nul au cours du transfert puisque $\frac{P_2}{P} > 11,938$ entraînerait $\frac{P_2}{P} > 11,938$ condition suffisante de transfert optimal "par l'infini").

De : p_e et p_b finis et continus

et :
$$\operatorname{sgn} \frac{dF}{dC} = \operatorname{sgn}(-p_e) \text{ si } F (= 4 p_e p_b (1-e^2) b - e p_L^2) > 0$$

on déduit : $\frac{dF}{dC}$ de signe constant si $F > 0$; F ne change de signe que deux fois au maximum, la première en décroissant et la seconde en croissant.

Il y a donc au maximum trois phases dans le transfert (à moins que le transfert ne soit optimal "par l'infini") ces trois phases ont lieu en des points fixes et sont donc des impulsions.

1ère phase :

$$F > 0, p_e, p_b \text{ et } T_1 \text{ sont positifs : } \frac{dF}{dC} < 0,$$

cette phase est composée d'une impulsion accélératrice ($T_1 > 0$) au périégée, e augmente.

2ème phase :

$F < 0$: une impulsion à l'apogée, e croît ou décroît ou bien croît puis décroît.

3ème phase :

$F > 0, p_b, p_e$ et T_1 sont négatifs, $\frac{dF}{dC} > 0$: une impulsion freinante ($T_1 < 0$) au périégée, e décroît.

e croît puis décroît : $e \approx \min[e_1, e_2]$.

e n'est jamais nul au cours du transfert, cela indique en particulier que les orbites initiale et finale sont coaxiales directes (c'est-à-dire ont la même direction de grand axe les périégées étant d'un même côté du centre attractif).

D'où les résultats :

à a_1, e_1, a_2, e_2, i_2 donnés (ou b_1, e_1, b_2, e_2, i_2) c'est entre orbites coaxiales directes ($\omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ ou π : deux cas symétriques) que le transfert est le moins coûteux, il est composé d'impulsions horizontales effectuées en l'une des extrémités du grand axe; on peut distinguer les trois cas suivants :

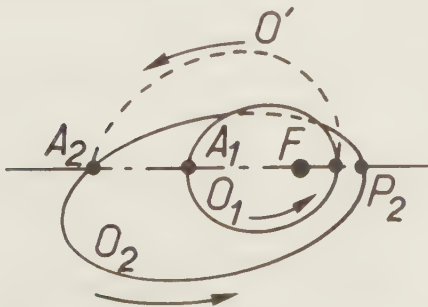


Fig. 11 - Transfert de "Hohmann généralisé"
("Generalized Homann" transfer)

- 1°) le transfert de "HOHMANN généralisé" par une orbite intermédiaire d'apogée l'apogée le plus élevé et de périégée le périégée de l'autre orbite (fig. 11), il y a deux impulsions, une en chacun de ces deux points,
- 2°) le transfert "par l'infini" utilisant deux paraboles intermédiaires tangentes respectivement en chacun des périégées (fig. 12), il y a deux impulsions finies : une en chacun des périégées, et une ou deux impulsions infiniment petites pour passer d'une parabole sur l'autre,
- 3°) le transfert "à trois impulsions" utilisant deux ellipses

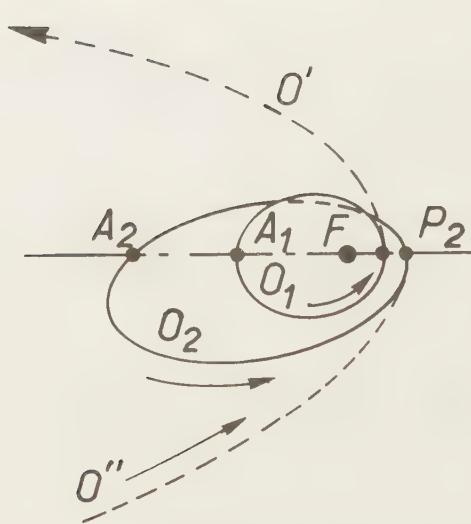


Fig. 12 - Transfert "par l'infini".
("Bi-parabolic" or "by infinity" transfer)

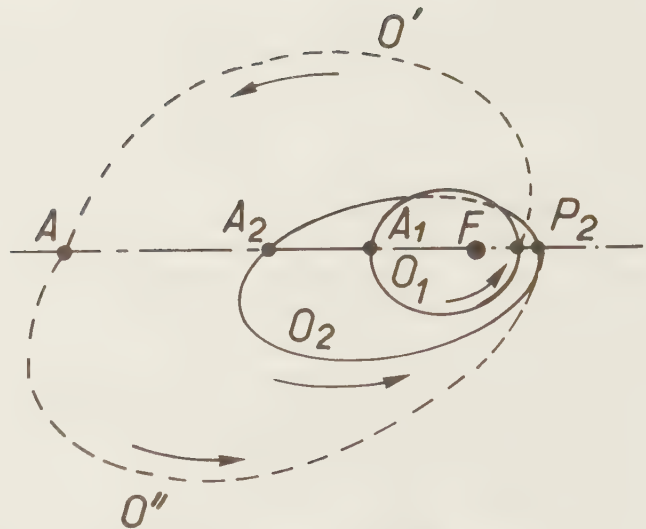


Fig. 13 - Transfert "à trois impulsions".
("Three-impulse transfer")

intermédiaires d'apogée commun A plus élevé que les deux apogées données, ces deux ellipses (fig. 13) ont respectivement pour périhélieux ceux des orbites données et les trois impulsions ont lieu en ces périhélieux et en l'apogée commun des ellipses intermédiaires.

La première impulsion est accélératrice (T_1 toujours positif) et la dernière freinante (T_3 toujours négatif).

Ce dernier type de transfert apparaît comme intermédiaire entre les deux autres qui en sont des cas particuliers limites.

Il y a donc encore trois paramètres à déterminer : l'orientation des plans des orbites intermédiaires et la position de leur apogée commun le long du grand axe.

II.6. ÉTUDE DES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COAXIALES DIRECTES.

(Le transfert entre orbites circulaires quelconques en est un cas particulier).

L'étude faite au chapitre précédent a conduit aux résultats suivants :

Si a_1, e_1, a_2, e_2 et i_2 sont fixés, les valeurs optimales de ω_2 et Ω_2 sont $\omega_2 = 0$ et $\Omega_2 = 0$ ou π (deux cas symétriques) et le transfert est entre deux ellipses coaxiales directes.

Les transferts optimaux ont alors, dans le cas le plus général, l'allure représentée en figure 14, ils utilisent deux ellipses intermédiaires O' et O'' d'apogée commun A plus élevé que ceux des orbites données, ces ellipses ont respectivement pour périhélieux ceux des orbites données et il y a trois impulsions : en P_1 puis en A puis en P_2 ; ces trois impulsions sont évidemment dans les plans horizontaux locaux, la première (en P_1) est toujours accélératrice (T_1 constamment positif), la troisième (en P_2) est toujours freinante (T_3 constamment négatif).

La solution optimale dépend encore de trois paramètres à déterminer : l'orientation des plans des deux ellipses intermédiaires (orientations définies par i' et i'' avec bien entendu $0^\circ \leq i' \leq i'' \leq i_2$) et la position le long du grand axe de leur apogée commun A .

Si la position optimale de A est en A_2 (ou en A_1 si $A_1 \gg A_2$) l'impulsion en P_2 disparaît (ou en P_1 si $A_1 \gg A_2$) et le transfert est de "HOHMANN généralisé" (fig. 15) : $\rightarrow$ à deux impulsions

"en l'apogée le plus élevé et au périégée de l'autre orbite", il y a évidemment une seule ellipse intermédiaire.

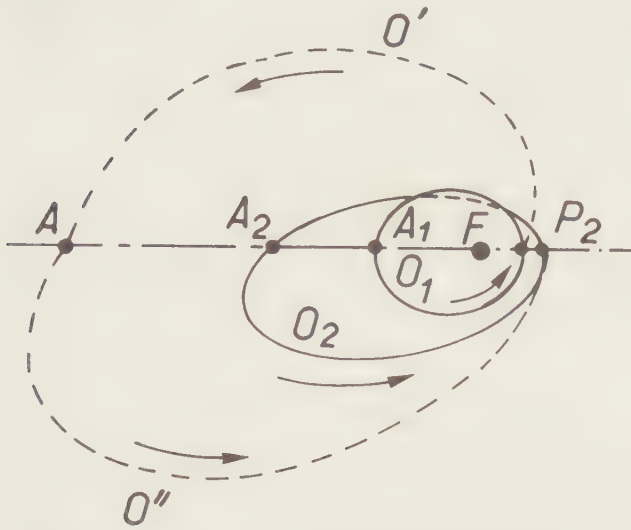


Fig. 14 - Transfert entre orbites coaxiales directes.
(Transfer between direct (or aligned) co-axial orbits)

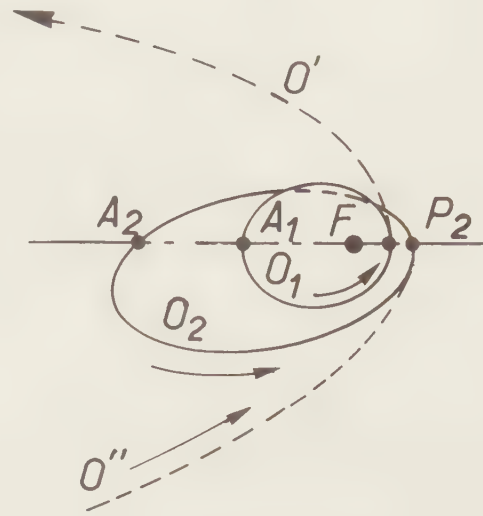


Fig. 16 - Transfert "par l'infini".
("Bi-parabolic" or "by infinity" transfer)

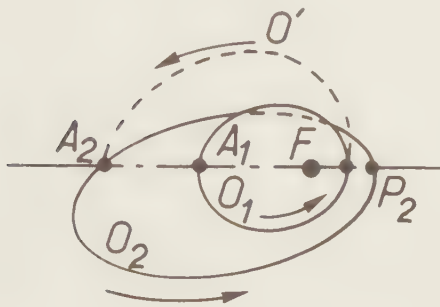


Fig. 15 - Transfert "de Hohmann généralisé".
("Generalized Hohmann" transfer)

Si la position optimale de A est infiniment loin, l'impulsion en A est infiniment petite, le transfert est "par l'infini" (fig. 16) et les orbites O' et O'' sont des paraboles respectivement situées dans les plans de O_1 et O_2 ($i' = 0$; $i'' = i_2$).

Dans les autres cas, le transfert est "à trois impulsions" (sous-entendu : trois impulsions finies), nous verrons qu'alors la plus grande partie du changement d'orientation du plan d'orbite a lieu en A lors de la seconde impulsion :

$$\frac{i'' - i'}{i_2} \geq 73,84 \% \left(= \frac{4 + \sqrt{7}}{9} \right).$$

II,6.1. DÉTERMINATION DES VALEURS OPTIMALES DE i' , i'' ET A .

Nous posons

$$x_1 = \frac{1}{P_1}, \quad x_2 = \frac{1}{P_2}, \quad y_1 = \frac{1}{A_1}, \quad y_2 = \frac{1}{A_2}$$

et $y = \frac{1}{A} : \left. \begin{array}{l} x_1 \geq y_1 \geq y \geq 0 \\ x_2 \geq y_2 \geq y \geq 0 \end{array} \right\}$ si $y = \min[y_1, y_2]$ le transfert est de "HOHMANN généralisé",
si $y = 0$ le transfert est "par l'infini"

et nous utiliserons le diagramme (fig. 17) qui représente les déplacements du moment cinétique $\vec{H}$ dans le plan perpendiculaire au grand axe commun.

On a les relations :

$$OJ^2 = H_1^2 = \frac{2\mu}{x_1 + y_1} ; \quad OK^2 = H_2^2 = \frac{2\mu}{x_2 + y_2} ;$$

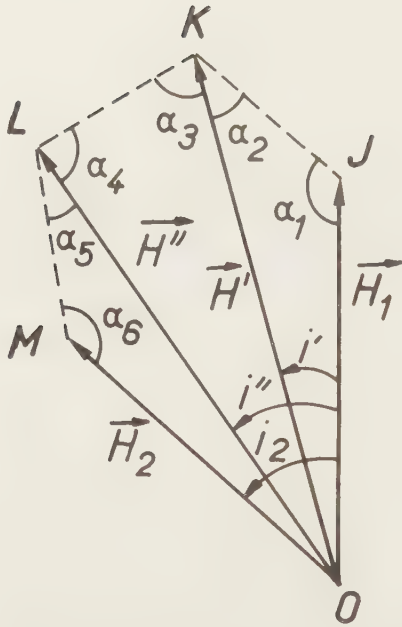


Fig. 17 - Diagramme des déplacements de $\vec{H}$.
($\vec{H}$ displacement diagram)

$$OL^2 = H''^2 = \frac{2\mu}{x_2 + y} ; OM^2 = H_2^2 = \frac{2\mu}{x_2 + y_2}.$$

Les déplacements de $\vec{H}$ sont liés aux impulsions :
 $\vec{\Delta H} = \vec{r} \wedge \vec{\Delta V}$ donc :

$$C_2 = \sum |\vec{\Delta V}| = x_1 JK + y KL + x_2 ML.$$

L'optimisation de i' et i'' à y (et donc A) fixés conduit à résoudre un problème d'optique qui peut s'écrire (grâce aux relations des indices et des triangles) :

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{x_1} \sqrt{x_1 + y_1};$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\lambda}{x_1} \sqrt{x_1 + y};$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{\lambda}{y} \sqrt{x_1 + y};$$

$$\sin \alpha_4 = \frac{\lambda}{y} \sqrt{x_2 + y}; \quad \sin \alpha_5 = \frac{\lambda}{x_2} \sqrt{x_2 + y}; \quad \sin \alpha_6 = \frac{\lambda}{x_2} \sqrt{x_2 + y_2};$$

la première impulsion est toujours une poussée accélératrice donc $\alpha_1 > 90^\circ$; de même $\alpha_6 > 90^\circ$ d'où : $\alpha_2 < 90^\circ$ et $\alpha_5 < 90^\circ$; supposons, en utilisant au besoin la réversibilité, que $x_1 \leq x_2$ donc $H' \geq H''$ et l'angle α_3 est aigu.

La valeur de λ , auxquels les sinus sont proportionnels, est déterminée par :

$$S \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 540^\circ - i_2$$

avec α_1 et α_6 obtus, α_2, α_3 et α_5 aigus, α_4 aigu ou obtus (ou droit); il y a toujours une solution et une seule en λ donc en i' et i'' , il est en effet aisé de vérifier que si l'on pose $S = S(\alpha_4)$ (par l'intermédiaire de λ) :

$$S(0) = 2\pi ; \quad S(\pi) = 3\pi \quad \text{et} \quad 0 < \frac{dS}{d\alpha_4} < 2$$

i' et i'' étant ainsi optimisés pour chaque valeur de y il nous faut rechercher la valeur optimale de cette dernière variable (compte tenu de $\min(y_1; y_2) \geq y \geq 0$).

On veut le minimum de $C_2 = \sum |\vec{\Delta V}| = x_1 JK + y KL + x_2 LM$ il faut donc étudier :

$$\frac{dC_2}{dy} = \frac{\lambda \sqrt{2\mu}}{2y} \left[\cot \alpha_3 + \cot \alpha_4 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_4 - \alpha_5}{2} \right]$$

on obtient ainsi les trois modes de transfert présentés ci-dessus (selon les valeurs de a_1, e_1, a_2, e_2, i_2) : de "HOHMANN généralisé", "par l'infini" et à "trois impulsions".

$\frac{dC_2}{dy}$ s'annule au plus deux fois sur le segment $[0, \min(y_1, y_2)]$; (s'il y a deux zéros de $\frac{dC_2}{dy}$, cette dérivée est négative entre les zéros et positive à l'extérieur).

Donc si :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dC_2}{dy} \leq 0 \text{ pour } y = \min [y_1, y_2] \\ \frac{dC_2}{dy} \leq 0 \text{ pour } y = 0 \end{array} \right\} \text{ le transfert optimal est "de HOHMANN généralisé"}$$

si :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dC_2}{dy} \leq 0 \text{ pour } y = \min [y_1, y_2] \\ \frac{dC_2}{dy} > 0 \text{ pour } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{le transfert optimal est soit} \\ \text{"de HOHMANN généralisé" soit} \\ \text{"par l'infini", il faut comparer} \\ \text{les deux cas} \end{array}$$

si :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dC_2}{dy} > 0 \text{ pour } y = \min [y_1, y_2] \\ \frac{dC_2}{dy} < 0 \text{ pour } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{le transfert optimal est "à trois impulsions"} \\ \text{et il faut rechercher les valeurs optimales de} \\ y \text{ (obtenue pour } \frac{dC_2}{dy} = 0 \text{) et de } i' \text{ et } i'' \end{array}$$

enfin, si :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dC_2}{dy} > 0 \text{ pour } y = \min [y_1, y_2] \\ \frac{dC_2}{dy} \gg 0 \text{ pour } y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{le transfert optimal est presque toujours} \\ \text{"par l'infini" mais il peut parfois être} \\ \text{"à trois impulsions"} \end{array}$$

$$\text{REMARQUE : pour } y=0 : \quad \text{sgn } \frac{dC_2}{dy} = \text{sgn} \left(\frac{3P_1 + 3P_2}{8\sqrt{P_1 P_2}} - \frac{1}{4} - \cos i_2 \right)$$

II,6.2. ÉTUDE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS.

II,6.2.1. TRANSFERTS ENTRE ORBITES COAXIALES DIRECTES DONT L'UNE EST D'EXCENTRICITÉ VOISINE DE 1.

Si $\frac{x_1}{x_2} \left(= \frac{P_2}{P_1} \right)$ ou bien si $\frac{x_2}{x_1} \left(= \frac{P_1}{P_2} \right) > 11,938$, le transfert optimal est toujours "par l'infini"

(voir les transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires, chapitre II,4).

Sinon x_1 et x_2 sont du même ordre de grandeur et $y (\leq \min [y_1, y_2])$ est infiniment petit devant eux (puisque l'une des excentricités est voisine de 1).

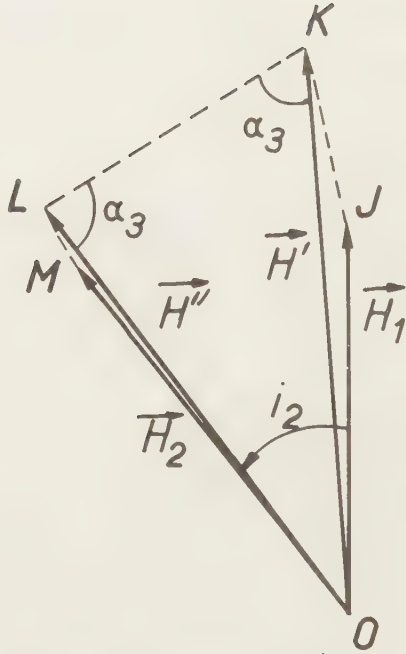


Fig. 18 - Diagramme de $\vec{H}$ pour les grandes excentricités.
($\vec{H}$ diagram for the large eccentricities)

Etudions donc le signe de $\frac{dC_2}{dy}$ pour $y \approx 0$.
Dans ce cas $i', \alpha_2, \alpha_5 \approx 0$; $i'' \approx i_2$; α_1 , $\alpha_6 \approx \pi$ et $\alpha_3 + \alpha_4 \approx \pi - i_2$ (fig. 18)

$$\text{donc : } \frac{dC_2}{dy} \approx LK - \frac{H' + H''}{2} = LK - \frac{OL + OK}{2}.$$

D'où, si l'on construit la figure 19 :

$$OA = \sqrt{P_1}, \quad OB = \sqrt{P_2}; \quad \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} \approx \frac{H'}{H''}$$

$$\widehat{AOB} = i_2 \approx i'' - i'$$

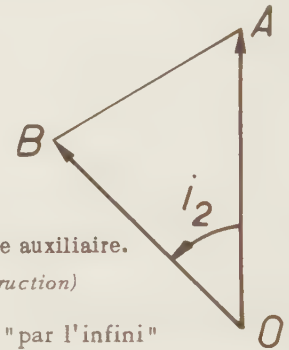


Fig. 19 - Construction géométrique auxiliaire.
(Auxiliary geometrical construction)

On peut écrire : Si $2AB > AO + OB$ le transfert optimal est "par l'infini"

Si $2AB < AO + OB$ le transfert optimal est de "HOHMANN généralisé".

Remarque : $2AB = AO + OB$ correspond bien à : $\frac{3P_1 + 3P_2}{8\sqrt{P_1 P_2}} - \frac{1}{4} - \cos i_2 = 0$.

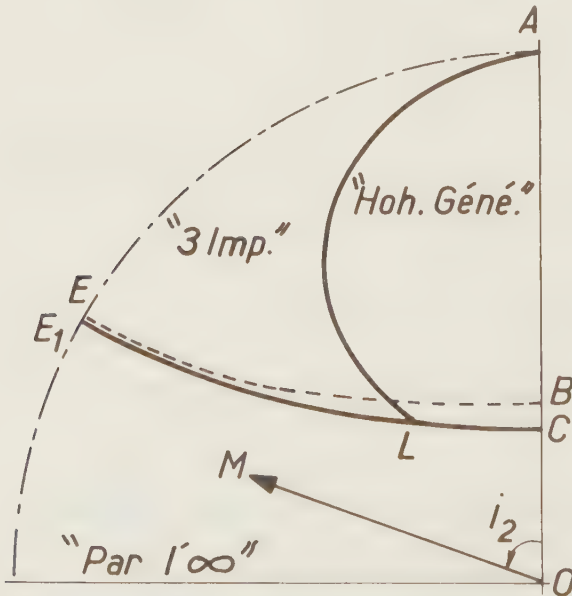


Fig. 20 - Discussion du mode optimal de transfert entre orbites circulaires.
(Discussion of the optimal type of transfer between circular orbits)

II,6.2.2. TRANSFERTS ENTRE ORBITES CIRCULAIRES.

Le mode optimal de transfert ne dépend que du rapport des rayons (égal à $\frac{P_1}{P_2}$) et de l'angle i_2 des plans d'orbites.

L'étude est plus compliquée que celle ci-dessus, elle conduit aux résultats indiqués sur la figure 20.

La figure est tracée en coordonnées polaires :

$$\widehat{AOM} = i_2;$$

$$OM = \rho = OA \cdot \min \left[\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}, \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \right]$$

(donc $OM \leq OA$ que nous prendrons pour longueur unité).

Si M est en zone ALC , le transfert optimal est du type de "HOHMANN généralisé".

Si M est en zone AE_1 , le transfert optimal est "à trois impulsions".

Enfin, si M est en-dessous de la courbe E_1LC , le transfert optimal est "par l'infini".

Sur cette même figure, la courbe EB tracée en pointillé correspond à la limite dans le cas précédent ($e_1 \simeq 1$ ou $e_2 \simeq 1$) avec les mêmes coordonnées polaires $i_2 = \widehat{AOM}$ et $\rho = OM = \min(\sqrt{P_1/P_2}; \sqrt{P_2/P_1})$; l'équation de EB est donc $\rho + 1 = 2AM$ et évidemment si e_1 ou $e_2 \simeq 1$:

M au-dessus de EB : transfert optimal de "HOHMANN généralisé"

M en-dessous de EB : transfert optimal "par l'infini".

Les éléments calculés avec précision sur la figure 20 sont les suivants :

Courbe E_1L : en E_1 : $\rho = 1$; $i_2 = 60,1850^\circ$

au voisinage de E_1 : $i_2 = 60,1850^\circ - 23,29^\circ [(1 - \rho)^2 + (1 - \rho)^3] + \text{ordre } (1 - \rho)^4$
(rayon de courbure correspondant : 1,230)

en L : $\rho = 0,388 = \frac{1}{\sqrt{6,62}}$; $i_2 = 37,54^\circ$.

Courbe AL : en A : $\rho = 1$; $i_2 = 0$

au voisinage de A : $\rho = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{6} i_2^2 + (\text{ordre } i_2^4)$

(rayon de courbure correspondant : $\frac{15 - 3\sqrt{3}}{22} = 0,4456$)

la courbe AL passe par le point $\rho = \frac{1}{\sqrt{3,5}} = 0,534 \dots$; $i_2 = 40,84^\circ$.

Courbe CL : en C : $\rho = 0,28942 = \frac{1}{\sqrt{11,938}}$; $i_2 = 0$

au voisinage de C : $\frac{1}{\rho^2} = 11,938 - 13,74 i_2^2 + (\text{ordre } i_2^4)$

(rayon de courbure correspondant : 1,915).

Les courbes E_1L et CL sont tangentes en L .

Remarque I :

Les trois rayons de courbure donnés ci-dessus correspondent à des cercles non seulement osculateurs mais même surosculateurs.

Remarque II :

On peut comparer les courbes E_1L et LC à la courbe voisine EB d'équation $\rho + 1 = 2AM$:

	ρ	i_2	TANGENTE	RAYON DE COURBURE
E	1	60°	RADIALE	$\frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,15470$
E_1	1	$60,1850^\circ$	RADIALE	1,230
B	1/3	0°	NORMALE AU RAYON	∞
C	0,28942	0°	NORMALE AU RAYON	1,915

les quatre rayons de courbure correspondent à des cercles surosculateurs (le point B est méplat).

Remarque III :

Un transfert optimal quelconque étant aussi optimal entre deux états intermédiaires et P et i ne changeant que lors de l'impulsion infiniment lointaine si le transfert optimal est "par l'infini" on peut dire : A P_1 , P_2 et i_2 donnés, si le transfert optimal n'est pas "par l'infini" pour e_1 ou $e_2 \simeq 1$ il ne l'est pas non plus pour e_1 et e_2 quelconques, d'autre part, si le transfert optimal est "par l'infini" pour $e_1 = e_2 = 0$ il l'est pour e_1 et e_2 quelconques donc, en utilisant la figure 20 pour e_1 et e_2 quelconques :

au-dessus de EB : le transfert optimal n'est pas "par l'infini"
en-dessous de E, LC : le transfert optimal est "par l'infini"
dans l'étroite bande E, LC, B : ?

Remarque IV :

Entre cercles égaux ($\rho = 1$) le transfert optimal (pour $i_2 < 60,1850^\circ$) est toujours "à trois impulsions" et non à une impulsion en l'un des nœuds comme on pourrait le croire.

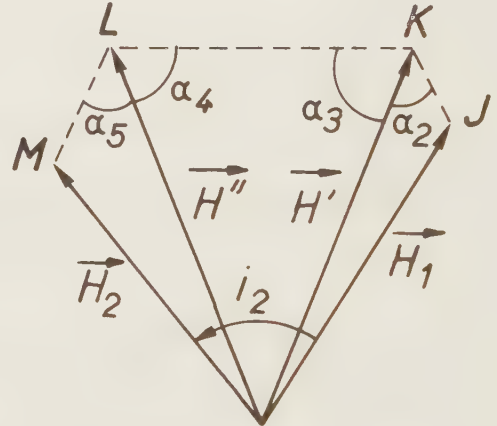
II,6.2.3. TRANSFERTS ENTRE ORBITES DE MÊME PÉRIGÉE.

Dans ce cas,
d'où : $H' = H''$

$$P_1 = P_2 ; x_1 = x_2$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 < \frac{\pi}{2} ; \alpha_2 = \alpha_5 < \frac{\pi}{2}$$

Fig. 20 bis - Diagramme de $\vec{H}$
dans le cas $P_1 = P_2$
($\vec{H}$ diagram in the case $P_1 = P_2$)



$$\frac{dC_2}{dy} = \frac{\lambda\sqrt{2\mu}}{2y} \left[\cot \alpha_3 + \cot \alpha_4 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha_4 - \alpha_5}{2} \right]$$

donc

$$\operatorname{sgn} \frac{dC_2}{dy} = \operatorname{sgn} [\pi + \alpha_2 - 3\alpha_3]$$

Etudions les "chemins optimaux" dans le cas où ces chemins correspondent à des possibilités de transferts optimaux à trois impulsions.

Dans ce cas : $\frac{dC_2}{dy} = 0$ donc : $\pi + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$.

Nous allons supposer, ce qui ne restreint pas la généralité, que

$$\mu = 1 ; P_1 = P_2 = x_1 = x_2 = 1 ; H_1 \gg H_2$$

et nous allons tracer la figure des déplacements de $\vec{H}$ (fig. 21) en plaçant toujours l'axe OY selon la médiatrice de KL .

Puisque $\alpha_2 = 3\alpha_3 - \pi$ on connaît α_2 et donc KJ en fonction de K , or $1 \leq OJ \leq OK$, J au plus loin de K est donc sur le cercle $C'BC$ de centre O et de rayon 1.

Les chemins optimaux, dans le cas "à trois impulsions" ont donc un tracé analogue à $JKLM$ (fig. 22), $CD D'C'$ en est un cas limite; il y a intersection des plus grands de ces trajets dans le voisinage des points C et C' .

D'où la discussion générale du transfert optimal quand les deux orbites données ont le même périhélie.

Nous supposons encore, ce qui ne restreint pas la généralité de l'étude : $\mu = 1$; $x_1 = x_2 = 1$; $H_1 \geq H_2$.

On construit $\vec{OJ} = \vec{H}_1$, $\vec{OK} = \vec{H}_2$ (fig. 23) (donc $\widehat{JOK} = i_2$); $\sqrt{2} \geq OJ \geq OK \geq 1$.
 $AFBMC$: cercle de centre O et de rayon 1.

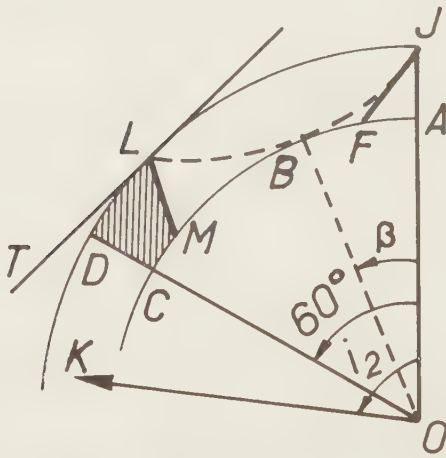


Fig. 23 - Discussion dans le cas $P_1 = P_2$
 (Discussion in the case $P_1 = P_2$)

L'hyperbole équilatère de centre O , de sommet B , passant par J détermine L (avec $OL = OJ$) on construit alors LM avec $\widehat{JLM} = 3\beta = 3\widehat{BOJ}$; M est entre A et C (avec $\widehat{AOC} = 60^\circ$).

On obtient : si K (qui est dans la couronne circulaire de centre O et de rayons OA et OJ), si K est :

A/ dans la région $ATLM$: le transfert optimal est de "HOHMANN généralisé".

B/ dans la région hachurée $LMCD$: le transfert optimal est "à trois impulsions".

C/ au-delà de CD ($i_2 > 60^\circ$) : le transfert optimal est "par l'infini".

Cette dernière proposition demande toutefois une petite restriction, en effet, nous avons vu sur la figure 22 que les chemins optimaux des cas à "trois impulsions" se recoupent au voisinage de C et C' pour les plus grands d'entre eux, il en résulte une légère augmentation de la zone à "trois impulsions" si e_1 et e_2 sont faibles :

Posons
$$j = \frac{1}{\sqrt{1+e_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+e_2}} ; \sqrt{2} < j \leq 2$$

si $j \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$ l'angle i_2 limite des cas à "trois impulsions" et "par l'infini" est 60° .

si $j > \frac{4\sqrt{2}}{3}$: i_2 limite $\simeq 60^\circ + 0,1850^\circ \cdot \left(\frac{j - \frac{4\sqrt{2}}{3}}{2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}} \right)^2$

$\left(j > \frac{4\sqrt{2}}{3} \right.$ correspond environ à $e_1 + e_2 < \frac{10 \text{ ou } 11}{40}$ $\left. \right)$

Remarque I :

Si K est sur l'arc JL les deux orbites sont égales et le transfert de "HOHMANN généralisé" dégénère en un transfert à une seule impulsion en l'apogée commun.

Remarque II :

Si l'on construit FJ tel que $\sin AFJ = \frac{1-e_1}{1+e_1}$, F est entre A et B , on obtient alors : si K

est dans la zone AFJ le transfert de "HOHMANN généralisé" dégénère en un transfert à une seule impulsion au périégée commun.

Remarque III :

Entre cercles (égaux car $P_1 = P_2$) $H_1 = H_2 = 1$, $MLJBF$ et A sont confondus, il n'y a plus de transfert de "HOHMANN généralisé" et la discussion se réduit à

$i_2 < 60,1850^\circ$: transfert "à trois impulsions"

$i_2 > 60,1850^\circ$: transfert "par l'infini";

on retrouve bien les conclusions obtenues pour les transferts entre cercles.

Remarque IV :

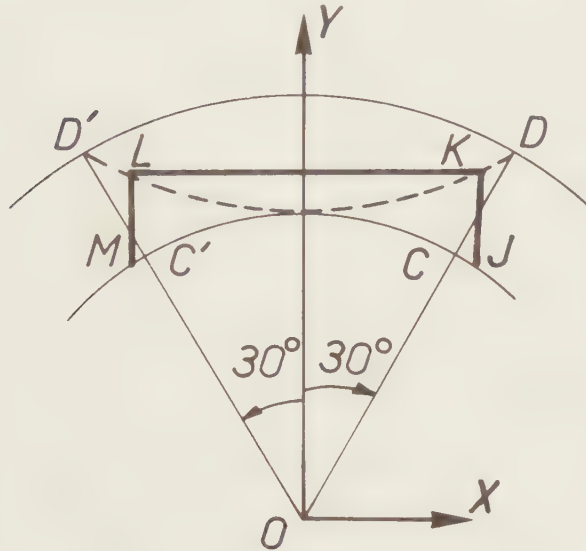


Fig. 24 - Transfert fini le plus ouvert.
("Most-open" finite transfer)

Si $\mu \neq 1$ ou bien si $x_1 = x_2 \neq 1$ un changement d'échelle approprié permet de se ramener à la discussion ci-dessus.

Le cas $i_2 = 60,1850^\circ$; $a_1 = a_2$; $e_1 = e_2 = 0$ est celui le plus ouvert où le transfert optimal ne soit pas "par l'infini", il lui correspond le déplacement $JKLM$ du vecteur $\vec{H}$ (fig. 24) avec $\widehat{JOD} = 0,0925^\circ$, $\widehat{DOK} = 1,6048^\circ$, $\frac{OD}{OJ} = \sqrt{2}$

$$\frac{OK}{OD} = 0,95545 = \frac{1}{\sqrt{1,09541}} ; \frac{1}{0,09541} = 10,481$$

les deux ellipses intermédiaires ont donc un apogée 10,481 fois plus loin que leur périégée qui sont eux en l'un des nœuds des deux cercles égaux donnés.

Si $i_2 > 60,1850^\circ$ (et i_2 peut aller jusqu'à 180°) le transfert optimal est "par l'infini" quel que soient $a_1, e_1, a_2, e_2, \Omega_2, \varpi_2$.

II,6.3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES TRANSFERTS ENTRE ORBITES COAXIALES DIRECTES.

Les éléments les plus importants dans la détermination du mode optimal de transfert sont, dans l'ordre :

- 1°) l'angle des plans d'orbite,
- 2°) le rapport des distances au centre des deux périégées,
- 3°) le rapport de la distance au centre de l'apogée le plus élevé à celui du périégée le plus bas,
- 4°) le rapport relatif à l'apogée le moins élevé.

La taille absolue des orbites n'intervient pas dans la détermination du mode optimal de transfert.

Nous allons effectuer la discussion du mode optimal de transfert en fonction des éléments 1°) et 2°) puis en fonction des éléments 1°) et 3°).

Les résultats sont indiqués sur les figures 25 et 26 disposées symétriquement.

Posons

$$P_0 = \min(P_1; P_2); P = \max(P_1; P_2); A = \max(A_1; A_2).$$

Les deux figures sont présentées en coordonnées polaires avec :

$$OA = 1 \quad OM = \rho = \sqrt{\frac{P_0}{P}} \leq 1 \quad ON = \sigma = \sqrt{\frac{P_0}{A}} \leq \rho \leq 1$$

$$\widehat{AOM} = \widehat{AON} = i_2; (0^\circ \leq i_2 \leq 180^\circ).$$

La discussion est faite en fonction des positions de M et N .

$$\frac{OM}{OA} = \sqrt{\frac{\min[P_1; P_2]}{\max[P_1; P_2]}}$$

$$\frac{ON}{OA} = \sqrt{\frac{\min[A_1; A_2]}{\max[A_1; A_2]}}$$

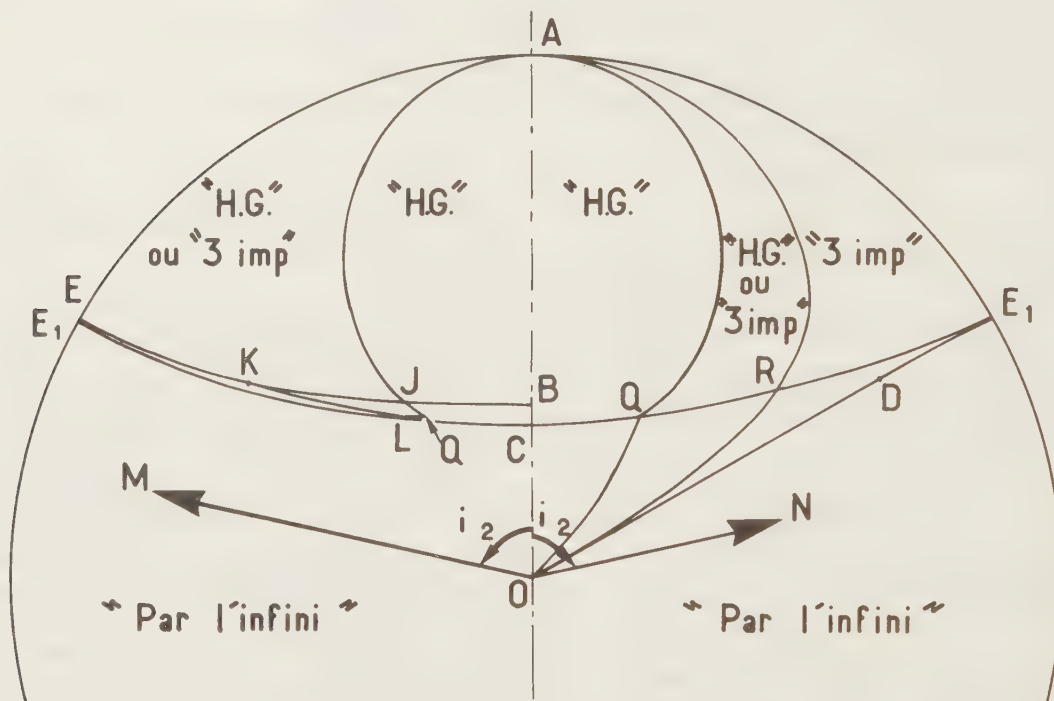


Fig. 25 & 26 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coaxiales directes.

(Determination of the optimal transfer type between direct (or aligned) co-axial orbits)

1°) MODE OPTIMAL DE TRANSFERT EN FONCTION DE LA POSITION DE M :

M EN ZONE :	MODE OPTIMAL :
AJB	"DE HOHMANN GÉNÉRALISÉ"
AJE	SOIT "HOHMANN GÉNÉRALISÉ" SOIT "A TROIS IMPULSIONS"
$BJQLC$	SOIT "HOHMANN GÉNÉRALISÉ" SOIT "PAR L'INFINI"
$JQLK$	ZONE COMMUNE AUX TROIS MODES
EE_1LK	SOIT "A TROIS IMPULSIONS" SOIT "PAR L'INFINI"
EN-DESSOUS DE E_1LC	"PAR L'INFINI"

2°) MODE OPTIMAL DE TRANSFERT EN FONCTION DE LA POSITION DE N :

N EN ZONE	MODE OPTIMAL :
$A Q C B$	"DE HOHMANN GÉNÉRALISÉ"
$Q A R$	SOIT "HOHMANN GÉNÉRALISÉ" SOIT "A TROIS IMPULSIONS"
$R A E_1$	"A TROIS IMPULSIONS"
$C Q O$	"SOIT HOHMANN GÉNÉRALISÉ" SOIT "PAR L'INFINI"
$Q R O$	ZONE COMMUNE AUX TROIS MODES
$O R E_1 D$	SOIT "A TROIS IMPULSIONS" SOIT "PAR L'INFINI"
AU-DESSOUS DE $O D E_1$	"PAR L'INFINI"

La connaissance des positions de M et N détermine le mode optimal de transfert dans la plupart des cas.

Etant donné la remarque III faite au paragraphe II,6.2.2. les courbes EB et E_1LC de la figure 25 sont les mêmes que celles de la figure 20.

Voici maintenant quelques renseignements sur les autres courbes :

La courbe AJQ est obtenue pour "le cas le plus défavorable au mode de HOHMANN généralisé à i_2 et ρ donnés", c'est ici un cas pour lequel :

$$A_1 = A_2 (=A) = P \gg P_0 \quad \text{et} \quad \frac{dC_2}{dy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \min(y_1, y_2)$$

au voisinage du point A cette courbe vérifie $\rho = 1 - i_2^2 + \frac{i_2^4}{6} + (\text{ordre } i_2^6)$

(rayon de courbure = $1/3$), elle passe par les points $\rho = \frac{1}{\sqrt{3,5}} = 0,534 \dots$; $i_2 = 36,68^\circ$ et

$\rho = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447 \dots$; $i_2 = 36^\circ 88'$ elle se termine en Q : $\rho = 0,37194$; $i_2 = 34,043^\circ$.

Le point K sur EB est à une distance $\rho = 0,66023$ de O donc $\frac{\rho+1}{2} = 0,83012$ de A ; ρ_K est racine de :

$$(\sqrt{2}-1)(3-\rho)(3\rho-1) = \frac{4}{3}(\rho+1)(2-\rho)(2\rho-1).$$

La courbe KL , limite pour le mode de "HOHMANN généralisé" est en réalité composée de deux morceaux :

Le morceau voisin de L est obtenu pour des orbites telles que : $P_1 = A_1 < P_2 \leq A_2$.

Le morceau voisin de K est obtenu pour des orbites telles que : $P_1 < P_2 = A_2 < A_1$.

Pour ces cas limites $\frac{dC_2}{dy} = 0$ pour $y = \min[y_1, y_2]$, le coût du transfert de "HOHMANN généralisé" étant égal à celui "par l'infini".

Sur la figure 26, les points Q et E_1 sont symétriques de leurs homonymes de la figure 25 et la courbe AQ est symétrique de AJQ .

La courbe ARO est obtenue pour le cas $P_1 = P_2 = A_1 \leq A_2$, elle correspond au point M sur la figure 23, son rayon de courbure est de :

$$\frac{113,3 - 10\sqrt{7}}{149} = 0,581 \dots \text{ en } A \quad (\sigma = 1 - i_2^2 \frac{16 + 5\sqrt{7}}{81} + \text{ordre } i_2^4)$$

elle passe par les points : $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $i_2 = 47,92^\circ$ et $\sigma = \sqrt{0,28} = 0,529 \dots$; $i_2 = 54,00^\circ$ et $\sigma = 0,3089$; $i_2 = 58,488^\circ$ enfin elle est tangente en O à la droite $i_2 = 60^\circ$.

La courbe CQ correspond au cas où $A_1 = A_2 = P > P_0$ pour lequel les transferts de "HOHMANN généralisé" et "par l'infini" sont équivalents, elle a pour équation :

$$\cos i_2 = \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{8\sigma^2}} \left[\frac{1 + 3\sigma^2}{1 + \sigma^2} - \left[\sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sigma} - \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{1 + \sigma^2}} \right]^2 \right]$$

La courbe QRE_1 est tangente en Q à la courbe CQ (tangente parallèle à la droite $i_2 = 77,99^\circ$) elle est obtenue pour :

- 1°) $\sigma < 0,94$: $P_0 < P = A_1 = A_2$ dans le cas où le transfert "par l'infini" est équivalent au meilleur transfert "à trois impulsions" (pour σ près de 1 : $i_2 \simeq 60,1850^\circ - (1,64^\circ \dots) (1 - \sigma)$)
- 2°) $\sigma > 0,94$: $P_1 = P_2 < A_1 = A_2$ on obtient :

$$i_2 \simeq 60^\circ + 0,1850^\circ \left(\frac{\sigma - \sqrt{7/9}}{1 - \sqrt{7/9}} \right)^2.$$

Il est difficile d'analyser ce qui se passe pour $\sigma \simeq 0,94$.

La courbe ODE_1 est un segment de droite ($i_2 = 60^\circ$) de O à D ($\sigma_D = 0,75408$) puis :

1°) de $\sigma = 0,75408$ à $\sigma = 0,94$: $i_2 = 60^\circ + \delta\sigma^2 0,044147 Rd + \delta\sigma^3 0,03759 Rd + (\text{ordre } \delta\sigma^3 (1 - \sigma))$ avec $\delta\sigma = \sigma - 0,75408$; cette partie de la courbe ODE_1 est obtenue pour l'équivalence entre le transfert "par l'infini" et le transfert "à trois impulsions" dans le cas $P_1 = P_2 = A_1 < A_2$

2°) $0,94 < \sigma < 1$: on obtient un morceau de la courbe $E_1 L$ (fig. 25).

Il est difficile d'analyser ce qui se passe pour $\sigma \simeq 0,94$.

Enfin, la courbe OQ est mal connue, sa tangente en O est la droite $i_2 = \text{Arc cos } \frac{11}{16} = 46,57^\circ$ elle est obtenue pour $P_1 < P_2 \leq A_1 = A_2$ avec $\frac{dC_2}{dy} = 0$ pour $y = \min [y_1, y_2]$.

REMARQUE 1

La courbe symétrique de $CQRE_1$ par rapport à AO est toujours entre EB et $E_1 LC$ très près de cette dernière.

REMARQUE 2

L'étude des transferts "à trois impulsions" voisins du cas "par l'infini" (c'est-à-dire pour $y \simeq 0$) conduit aux résultats suivants :

Soit l'inéquation (1)

$$(1) \quad \begin{aligned} & (3\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})(3\sqrt{P_2} - \sqrt{P_1}) \left[\sqrt{P_1} \left(\sqrt{\frac{2}{1 + e_1}} - 1 \right) + \sqrt{P_2} \left(\sqrt{\frac{2}{1 + e_2}} - 1 \right) \right] \\ & \leq \frac{4}{3} (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}) (2\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2}) (2\sqrt{P_2} - \sqrt{P_1}). \end{aligned}$$

Si l'inéquation (1) est vérifiée, ce qui exige $\frac{1}{4} \leq \frac{P_1}{P_2} \leq 4$, ce qui se ramène à :

$$j = \frac{1}{\sqrt{1+e_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+e_2}} \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

pour $P_1 = P_2$ (inégalité rencontrée en II,6.2.3) et ce qui est vérifié dans des conditions assez larges par exemple si :

$$\frac{4}{9} \leq \frac{P_1}{P_2} \leq \frac{9}{4} \text{ et } e_1 + e_2 \gg 1 - 1,6 \min [e_1, e_2]$$

si donc l'inéquation (1) est vérifiée l'angle i_2 limite pour les cas de transferts "par l'infini" est indépendant de A_1 et A_2 et de e_1 et e_2 , il vaut :

$$i_e = \text{Arc cos} \left[\frac{3P_1 + 3P_2}{8\sqrt{P_1 P_2}} - \frac{1}{4} \right]$$

et correspond à la courbe limite $E K J B$ (fig. 25); pour $i_2 = i_e - \epsilon < i_e$ le transfert optimal est "à trois impulsions".

Si l'inéquation (1) n'est pas vérifiée, la valeur limite i_e est alors plus élevée.

II,6.3.1. CAS DES ORBITES INFINIMENT PROCHES.

Si les deux orbites données sont infiniment proches i_2 est voisin de 0° et $\frac{P_2}{P_1}$ est voisin de 1, le point M (fig. 25) est proche du point A et le transfert optimal est généralement du type de "HOHMANN généralisé" mais il peut être "à trois impulsions", la figure 26 indique alors que $P_0 \simeq A$: les deux orbites données sont des quasi-cercles; cherchons dans ce dernier cas la valeur limite i_e de i_2 ($i_2 \ll i_e$ transfert de "HOHMANN généralisé"
 $i_2 > i_e$ transfert "à trois impulsions").

Prenons pour unité de longueur la plus grande distance d'apogée que nous supposerons par exemple être A_1 :

$$\left. \begin{array}{ll} A_1 & 1 \\ P_1 & 1 - \epsilon \\ A_2 & 1 - \delta \\ P_2 & 1 - j \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2e_1 \simeq \epsilon \gg 0 \\ 2e_2 \simeq j - \delta \quad j \gg \delta \gg 0 \\ \epsilon, \delta \text{ et } j \text{ sont petits} \end{array}$$

la partie principale de i_e est :

$$i_e \simeq \frac{3j + 2\epsilon - \sqrt{(2j + \epsilon)^2 - \delta\epsilon - \delta j}}{\sqrt{2(\epsilon + j)}}$$

soit :

$$i_e \simeq \frac{3\delta + 6e_2 + 4e_1 - \sqrt{(2e_1 + 4e_2)^2 + 6e_1\delta + 14e_2\delta + 3\delta^2}}{\sqrt{4e_1 + 4e_2 + 2\delta}}$$

$$\text{si } \delta = 0, (A_1 = A_2): i_p \sim \sqrt{\frac{\varepsilon + j}{2}} \sim \sqrt{e_1 + e_2}$$

$$\text{si } \delta = j; \varepsilon = 0, (\text{entre cercles}): i_p \sim \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{j}.$$

REMARQUE :

entre cercles égaux, le transfert optimal est, nous le savons, à trois impulsions, il utilise la suite : $A_1 = P_1 = 1 - \varepsilon$ puis $A' = 1, P' = 1 - \varepsilon$ puis $A'' = 1, P'' = 1 - \varepsilon$, enfin $A_2 = P_2 = 1 - \varepsilon$ (l'échelle étant prise de façon que les plus grandes distances d'apogées A' et A'' correspondent à la longueur unité); deux impulsions successives de ce transfert correspondant à un cas limite entre les transferts de "HOHMANN généralisé" et "à trois impulsions" on en déduit :

$$\left. \begin{aligned} i'' - i' = i_p \quad (\text{obtenu pour } \delta = 0 \text{ et } j = \varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon} \\ i_2 - i' = i'' = i_p \quad (\text{obtenu pour } \delta = j = \varepsilon) &= \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \text{d'où : } i_2 = (4 - \sqrt{7}) \sqrt{\varepsilon}$$

D'où pour ce cas, qui correspond au *minimum* du rapport $\frac{i'' - i'}{i_2}$

$$\frac{i'' - i'}{i_2} = 73,84 \% \quad \left(= \frac{4 + \sqrt{7}}{9} \right).$$



III - TROISIÈME PARTIE

TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES

L'étude des transferts optimaux entre orbites coplanaires est notablement plus compliquée que celle entre orbites coaxiales directes (coplanaires ou non), les positions optimales d'impulsion ne sont plus limitées au périégée et à l'apogée mais elles se répartissent, selon les cas, tout au long des orbites données et leur recherche est généralement malaisée.

Nous verrons qu'il est simple de bâtir des solutions optimales à partir d'ellipses intermédiaires, mais le problème normal : rechercher les ellipses intermédiaires optimales pour un transfert donné n'est généralement résolu qu'implicitement.

Toutefois, les transferts optimaux entre orbites coplanaires sont bien plus simples que ceux entre orbites quelconques : ils ne sortent jamais du plan des deux orbites et n'ont jamais plus de trois impulsions finies; un grand nombre d'entre eux sont optimaux "par l'infini" (cas à deux impulsions finies (en les périégées) et deux impulsions infiniment petites (à grande distance).

III,1. ANALYSE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES.

Nous avons vu qu'un choix approprié de paramètres d'état permettait de simplifier considérablement le problème du transfert optimal entre orbites coaxiales directes.

Nous allons opérer de même pour les transferts entre orbites coplanaires.

Considérons les seuls paramètres d'état suivants : a , e , C et L' (égal à la longueur de la courbe sphérique décrite par l'extrémité du vecteur unitaire dirigé du centre attractif vers le périégée : L' est un paramètre analogue à L).

Le problème est canonique en fonction des seuls paramètres a , e , L' et C .

En effet :

$$\frac{da}{dC} = \frac{2a}{nb} \left[S_1 e \sin v + T_1 (1 + e \cos v) \right]$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{b}{na^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right]$$

$$\frac{dC}{dC} = 1$$

et de :

$$\frac{di}{dC} = \frac{W_1 r \cos u}{H} \quad \frac{d\Omega}{dC} = \frac{W_1 r \sin u}{H \sin i}$$

$$\frac{d\varpi}{dC} = \left(1 - \cos i \right) \frac{d\Omega}{dC} + \frac{b}{na^2 e} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]$$

on déduit :

$$\frac{dL'}{dC} = \sqrt{\frac{W_1^2 r^2 \sin^2 v}{H^2} + \frac{b^2}{n^2 a^4 e^2} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]^2}$$

donc : $\frac{da}{dC}, \frac{de}{dC}, \frac{dL'}{dC}, \frac{dC}{dC}$ ne dépendent que de a et e (grâce à $b = a \sqrt{1-e^2}, n^2 a^3 = \mu, H = nab$)

et des paramètres de commande S_1, T_1, W_1 et v (avec

$$S_1^2 + T_1^2 + W_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{v}{2}.$$

On peut donc utiliser la méthode de PONTYAGIN pour étudier le problème de la minimisation de C_2 dans le transfert de $a_1, e_1, L'_1 (=0)$ à a_2, e_2, L'_2 .

Posons :

$$\mathcal{H} = p_a \frac{da}{dC} + p_e \frac{de}{dC} + p_{L'} \frac{dL'}{dC} + p_C \frac{dC}{dC}$$

nous voulons C final minimum il nous faut donc choisir $\mathcal{H}$ maximum par rapport aux commandes S_1, T_1, W_1, v .

1^{er} cas :

$$p_{L'} \leq 0, \quad \text{or} \quad \frac{dL'}{dC} \geq 0 \quad \text{donc} \quad p_{L'} \frac{dL'}{dC} \leq 0.$$

Nous savons (par l'étude des transferts entre orbites coaxiales directes et coplanaires) que le

maximum de $p_a \frac{da}{dC} + p_e \frac{de}{dC} + p_C$ est obtenu pour des poussées tangentielles au périégée ou en

l'apogée ($S_1 = W_1 = 0; T_1 = \pm 1; v = 0$ ou π), dans ce cas $\frac{dL'}{dC}$ est nul, cela correspond donc visiblement au maximum de $\mathcal{H}$.

2^e cas : $p_{L'} > 0$.

Optimisons tout d'abord $\mathcal{H}$ à v fixé vis à vis de S_1, T_1, W_1

$$\mathcal{H} = p_C + \underbrace{\lambda_1 S_1 + \lambda_2 T_1}$$

$$+ p_{L'} \sqrt{\frac{W_1^2 r^2 \sin^2 v}{H^2} + \frac{b^2}{n^2 a^4 e^2} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]^2}$$

$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 T_1$ sont les termes dus à $p_a \frac{da}{dC}$ et $p_e \frac{de}{dC}$ (λ_1 et λ_2 sont ici des constantes).

Examinons le radicande, il vaut :

$$R = \frac{1}{H^2} \left[W_1^2 r^2 \sin^2 v + \frac{p^2}{e^2} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]^2 \right]$$

or

$$W_1^2 = 1 - S_1^2 - T_1^2$$

donc :

$$R = \frac{1}{H^2} \left[r^2 \sin^2 v + S_1^2 \left(\frac{p^2}{e^2} \cos^2 v - r^2 \sin^2 v \right) - \frac{2p^2}{e^2} S_1 T_1 \cos v \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) + T_1^2 \left[\frac{p^2}{e^2} \left(\sin^2 v + \frac{2a}{b} \sin v \sin E \right) + b^2 \sin^2 E \left(\frac{1}{e^2} - 1 \right) \right] \right]$$

le terme en T_1^2 est toujours positif, ou nul, donc :

$$R = \alpha + \beta_1 S_1 + 2\beta_2 S_1 T_1 + \beta_3 T_1^2$$

avec :

$$R \geq 0; \alpha \geq 0; \beta_3 \geq 0; \alpha, \beta_1, \beta_2 \text{ et } \beta_3$$

étant des constantes (pour v fixé).

Il faut donc maximiser (vis à vis de S_1, T_1, W_1) $\mathcal{H}$ tel que :

$$\mathcal{H} = p_c + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 T_1 + p_L' \sqrt{\alpha + \beta_1 S_1^2 + 2\beta_2 S_1 T_1 + \beta_3 T_1^2}.$$

Soit alors ψ l'angle tel que en posant :

$$\begin{cases} S_1' = S_1 \cos \psi + T_1 \sin \psi \\ T_1' = -S_1 \sin \psi + T_1 \cos \psi \end{cases}$$

on obtienne :

$$\beta_1 S_1'^2 + 2\beta_2 S_1' T_1' + \beta_3 T_1'^2 = \gamma_1 S_1'^2 + \gamma_3 T_1'^2$$

$$\left(\gamma_3 = \frac{\beta_3 + \beta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_3 - \beta_1}{2} \right)^2 + \beta_2^2} \geq \beta_3 \geq 0 \right)$$

donc

$$\mathcal{H} = p_c + \lambda_1' S_1' + \lambda_2' T_1' + p_L' \sqrt{\alpha + \gamma_1 S_1'^2 + \gamma_3 T_1'^2}$$

p_L' et γ_3 étant positifs ou nuls la maximisation de $\mathcal{H}$ à S_1' fixé conduit à prendre T_1' maximal ou minimal c'est-à-dire que $S_1'^2 + T_1'^2 = 1 = S_1^2 + T_1^2$ d'où $W_1 = 0$, donc, dans ce dernier cas comme dans l'autre, la maximisation de $\mathcal{H}$ conduit toujours à prendre $W_1 = 0$: on ne sort pas du plan de l'orbite initiale.

Donc, le problème posé :

orbite initiale : $a_1, e_1, C_1 (= 0), L_1' (= 0)$.

orbite finale : $a_2, e_2, L_2' (L_2' = \text{longueur de la sphérique décrite par l'extrémité du vecteur}$

unitaire de la direction du périée; L'_2 dépend du transfert et non uniquement de l'orientation de l'orbite finale).

but recherché : C_2 minimum

admet pour solution optimale une solution entièrement plane ($i \equiv 0$; $i_2 = 0$ Ω et Ω_2 sont indifférents), il n'y a plus que trois paramètres d'orbite à considérer : a , e et ϖ , or, grâce aux symétries du domaine de manoeuvrabilité, da , de et dC étant donnés à un instant quelconque, on peut toujours choisir le signe de $d\varpi$ et, en prenant ce signe constant, on obtient :

$$\int dL' = \int |d\varpi| = \left| \int d\varpi \right| \quad \text{soit} \quad |\varpi_2| = L'_2.$$

Si d'autre part on appelle ψ_2 ($0^\circ \leq \psi_2 \leq 180^\circ$) l'angle des directions de périée des deux orbites données on a dans tous les cas $\psi_2 \leq L'_2$ d'où les propriétés suivantes :

- 1°) A $a_1, e_1, a_2, e_2, \psi_2$ donnés c'est entre orbites coplanaires (donc pour $i_2 = 0$, Ω_2 quelconque, $\varpi_2 = \pm \psi_2$) que le transfert optimal est le moins coûteux.
- 2°) Le transfert optimal entre orbites coplanaires est en entier dans le plan des deux orbites et la variation de ϖ (avec $-\pi \leq \varpi \leq +\pi$) est monotone au cours du transfert.
- 3°) Dans le cas coplaire ($W_1 \equiv 0$) le domaine de manoeuvrabilité ayant la symétrie $d\varpi, -d\varpi$ (par ν en $-\nu$; S_1 en $-S_1$) et étant indépendant de ϖ le coût d'un transfert entre orbites coplanaires ($a_1, e_1 \rightarrow a_2, e_2, \varpi_2$) est indépendant du signe de ϖ_2 et est une fonction non décroissante de $|\varpi_2|$ (pour $-\pi \leq \varpi_2 \leq +\pi$).

III.2. RÉSUMÉ DES RÉSULTATS DÉJÀ CONNUS.

TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES.

L'étude théorique des transferts optimaux entre orbites coplanaires est très longue [3], nous allons simplement indiquer les idées suivies et les résultats obtenus puis nous examinerons quelques cas particuliers simples.

En général, les transferts optimaux entre orbites coplanaires sont à deux impulsions avec donc une ellipse intermédiaire, mais si les orbites données sont assez différentes, le transfert optimal devient du type "par l'infini" (à quatre impulsions dont deux infiniment petites avec des paraboles ou quasi-paraboles et une grande ellipse intermédiaires). Il y a aussi des cas (rares) de transfert optimaux à une ou à trois impulsions, ces derniers n'apparaissent que si $e_1 + e_2 > 1,712$ et $0^\circ < |\varpi_2| < 22^\circ$.

Les impulsions sont toujours dans l'un des angles aigus de la tangente et de l'horizontale locale à moins de 27° de celle-ci.

Il est aisé de bâtir des exemples de transferts optimaux à partir d'ellipses intermédiaires mais le problème inverse : trouver l'ellipse ou les ellipses intermédiaires optimales à partir des orbites initiale et finale n'est en général résolu qu'implicitement.

ÉTUDE DU DOMAINE DE MANOEUVRABILITÉ.

Puisque (chapitre III,1) le transfert optimal entre orbites coplanaires est en entier dans le plan des deux orbites, on peut choisir pour paramètres d'état a, e, ϖ et C , nous prendrons ici plutôt : $b (= a \sqrt{1 - e^2})$, e, ϖ et C .

Les équations du problème sont alors :

$$\frac{db}{dC} = \frac{1}{n} \left[T_1 (2 + e \cos \nu - e \cos E) + S_1 e \sin \nu \right]$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{b}{na^2} \left[T_1 (\cos v + \cos E) + S_1 \sin v \right]$$

$$\frac{d\varpi}{dC} = \frac{b}{na^2e} \left[T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) - S_1 \cos v \right]$$

$$S_1^2 + T_1^2 = 1 \quad (\text{car } W_1 \equiv 0).$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} S_1 &= \sin \varphi \\ T_1 &= \cos \varphi \end{aligned}$$

φ est l'angle (positif vers le haut) de la direction de poussée avec l'horizontale avant (fig. 27)
d'où, en posant

$$\frac{na^2}{b} \cdot \frac{de}{dC} = X; \quad nae \frac{d\varpi}{dC} = Y; \quad n \frac{db}{dC} = Z :$$

$$X = \cos(v - \varphi) + \cos E \cos \varphi$$

$$Y = \frac{b}{a} \sin(v - \varphi) + \sin E \cos \varphi$$

$$Z = 2 \cos \varphi + e \cos(v - \varphi) - e \cos E \cos \varphi$$

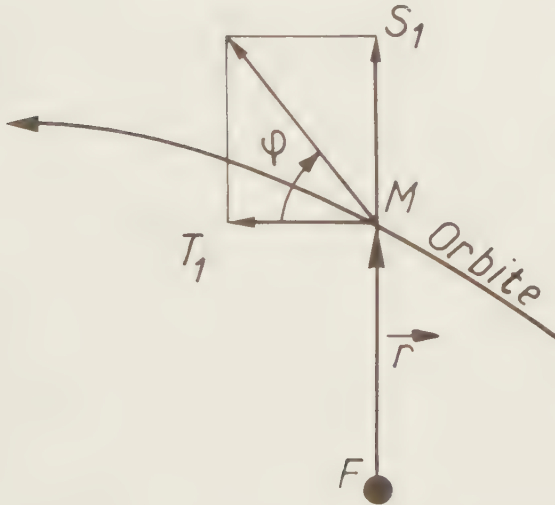


Fig. 27 - Angle φ .

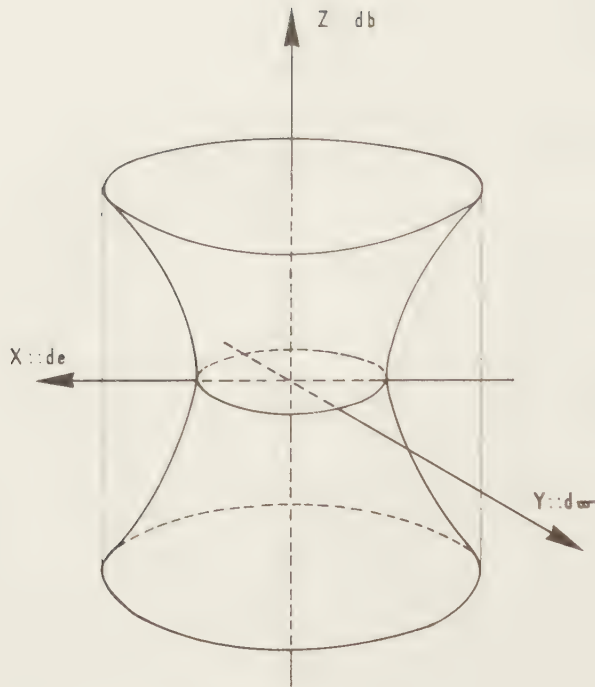
les coordonnées X, Y, Z décrivent, aux facteurs d'échelle $\frac{na^2}{b}, nae, n$ près, le domaine de manoeuvrabilité, les paramètres de commande sont v et φ

$$(\text{avec } \operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2});$$

puisque $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2}$ le domaine de manoeuvrabilité en X, Y, Z ne dépend que du seul paramètre d'état e .

Domaine pour $e = 0$:

$$X^2 + Y^2 = 1 + \frac{3}{4} Z^2 \leq 4$$



Le domaine de manoeuvrabilité est formé d'un hyperboloïde à une nappe limité à $Z = \pm 2$ (fig. 28), on le complète par le plus petit solide convexe le contenant c'est-à-dire ici par le cylindre $X^2 + Y^2 \leq 4$ et $|Z| \leq 2$.

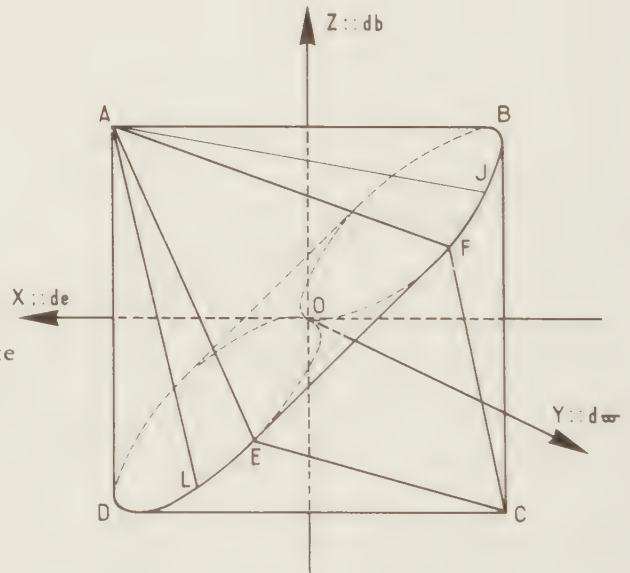
Fig. 28 - Domaine de manoeuvrabilité pour $e = 0$.
(Manoeuverability domain for $e = 0$)

Domaine pour $e = 1$

Le domaine de manoeuvrabilité comprend :

- 1° le segment de $A (+2, 0, +2)$ à $C (-2, 0, -2)$ obtenu pour $\nu = 0$ (fig. 29),
- 2° les ellipses OFB et OED d'équations $X = -Z = \pm(1 - \cos E)$; $Y = \sin E$ obtenues pour $\varphi = 0$ ou π ,
- 3° le plus petit convexe contenant le segment AC et les deux ellipses ci-dessus, ce convexe est limité par quatre triangles tels AEF et quatre nappes coniques telles AFB .

Fig. 29 - Domaine de manoeuvrabilité pour $e \simeq 1$.
(Manoeuverability domain for $e \simeq 1$)



Cas e quelconque

Le domaine de manoeuvrabilité est toujours symétrique par rapport aux éléments O , OY et OXZ , il est toujours à l'intérieur du cylindre $X^2 + Y^2 \leq 4$; $|Z| \leq 2$ dont il contient le carré $ABCD$ dans le plan OXZ ; il se déforme de manière continue depuis le cas $e = 0$ jusqu'au cas $e = 1$ (fig. 30 et 31).

Pour $e \simeq 0$ (fig. 30) le domaine de manoeuvrabilité comprend deux zones convexes (en hachures) pincées en A , B , C et D et trois surfaces réglées, l'une latérale de génératrices telles LM , les deux autres en haut et en bas avec des génératrices telles JK .

Ces génératrices correspondent aux possibilités de commutation (c'est-à-dire aux discontinuités dans la position du point d'application optimal de la poussée).

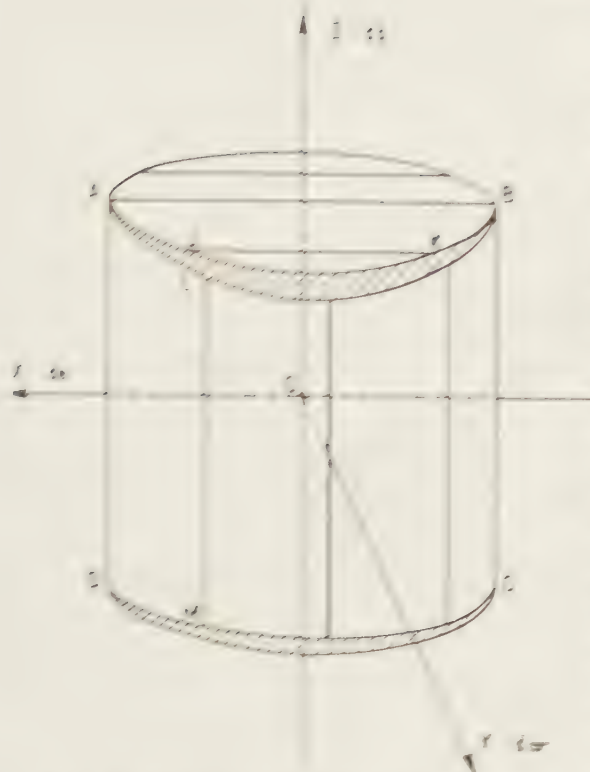


Fig. 10 - Domaine de manoeuvrabilité pour $e \leq 0$.

Manoeuvrability domain for $e \leq 0$.

Pour $e \leq 1$ (Fig. 11) il y a quatre zones convexes les faces respectivement placées en A , B , C et D , quatre triangles tels RFG et six variétés réglées d'appariement, dont JK , LM , PN sont les génératrices.

Les quatre triangles correspondent à des possibilités de double commutation d'arrivées à des transitoires optimaux (minimums à trois impulsions).

Il y a une rareté $\mathcal{Q}_0$ lorsque de 0,025 jusqu'à $\mathcal{Q}_0 < 0,050$, pour laquelle apparaît avec les triangles qui déterminent le domaine pour $e \leq 1$.

En vertu de la théorie du domaine de manoeuvrabilité, la commande (φ et ψ) doit être telle que l'on utilise toujours un point de la frontière du domaine de manoeuvrabilité cela se peut obtenir que sur les zones convexes structurées (Fig. 10 et 11). Les points des variétés réglées sont obtenus par combinaison des deux commandes correspondant aux deux extrémités d'une même génératrice.

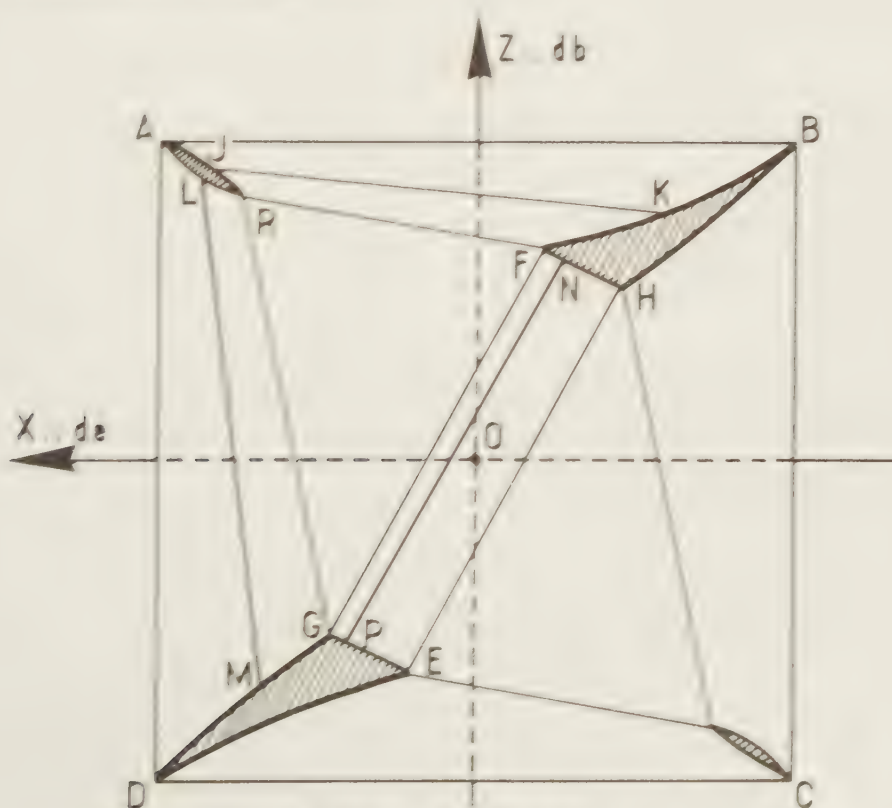


Fig. 11 - Projection sur OXZ du domaine de manoeuvrabilité pour $e \leq 1$.

Projection on OXZ of the manoeuvrability domain for $e \leq 1$.

On est ainsi conduit à définir des "angles utiles" en dehors desquels toute poussée est non optimale (fig. 32).

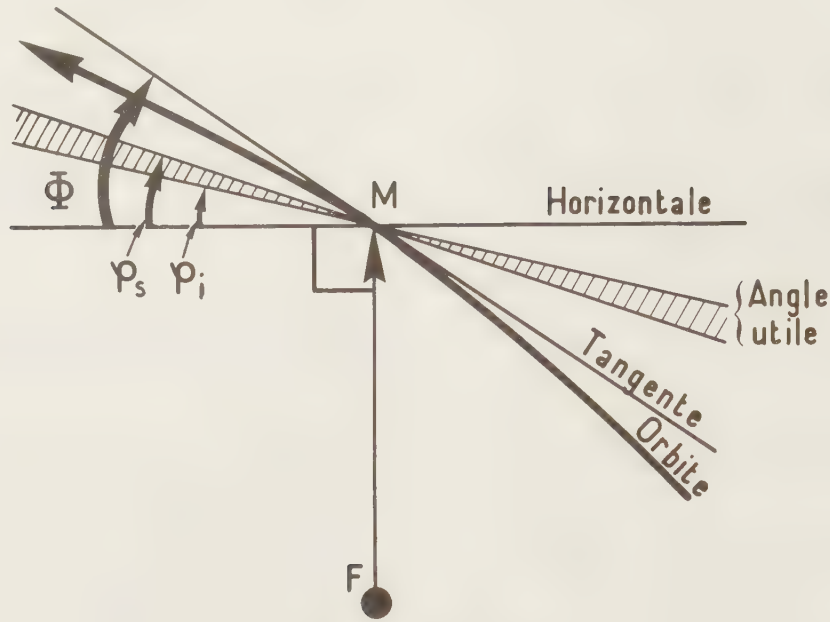


Fig. 32 - Angle utile.
(Useful angle)

A cause des symétries, l'angle utile est toujours composé de deux angles opposés par le sommet; il est toujours dans les angles aigus de la tangente et de l'horizontale locale, nous le repèrerons par φ_i et φ_s (fig. 32), avec :

$$0 \leq \varphi_i \leq \varphi_s \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{si } \sin v \geq 0$$

et

$$0 \geq \varphi_i \geq \varphi_s \geq \Phi \geq -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } \sin v \leq 0$$

et pour les valeurs utiles de φ : $\operatorname{tg} \varphi_i \leq \operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{tg} \varphi_s$
ou bien $\operatorname{tg} \varphi_i \geq \operatorname{tg} \varphi \geq \operatorname{tg} \varphi_s$
selon le signe de $\sin v$.

Voici des développements de φ_i et φ_s au voisinage de $e = 0$ et de $e = 1$.

1°) Développement pour $e \simeq 1$

Posons $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \varepsilon$

A/ au voisinage du périégée à l'ordre ε^5 près :

$$\varphi_i = \frac{v}{4} + \frac{v^3}{512} - \frac{3v\varepsilon^2}{32} ; \quad \varphi_s = \frac{v}{4} - \frac{v^3}{512} - \frac{v\varepsilon^2}{32}$$

et $|v| \leq 4\varepsilon + \frac{19}{6} \varepsilon^3$ (au-delà : $|\varphi_i| > |\varphi_s|$, il n'y a plus d'angle utile).

B/ dans la moitié haute de l'orbite à l'ordre ε^3 près :

$$\varphi_i = \varepsilon \sin E \max \left[\frac{1}{2(1 - \cos E)} ; -1 + \sqrt{3 + \frac{\cos E}{\varepsilon^2}} \right]$$

nous poserons :

$$\begin{cases} \varphi_i = \frac{\varepsilon \sin E}{2(1 - \cos E)} = \frac{\sin v}{2} \\ \varphi_i' = \varepsilon \sin E \left[-1 + \sqrt{3 + \frac{\cos E}{\varepsilon^2}} \right] \end{cases}$$

$$\varphi_s = \frac{3}{2} \sin v = 3 \varphi_i.$$

Pour $\cos E < -\frac{3}{4} \varepsilon^2 + \text{ordre } \varepsilon^4$ l'angle utile va de φ_i à φ_s .

Pour $-\frac{3}{4} \varepsilon^2 + \text{ordre } \varepsilon^4 < \cos E < +\frac{13}{4} \varepsilon^2 + \text{ordre } \varepsilon^4$ l'angle utile va de φ_i' à φ_s .

Pour $\cos E > \frac{13}{4} \varepsilon^2 + \text{ordre } \varepsilon^4 : |\varphi_i'| > |\varphi_s|$ il n'y a plus d'angle utile.

$$\text{Ainsi de } v = 4\varepsilon + \frac{19\varepsilon^3}{6} \text{ à } E = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{4} \varepsilon^2 \text{ et de } v = -4\varepsilon - \frac{19\varepsilon^3}{6} \text{ à } E = -\frac{\pi}{2} + \frac{13}{4} \varepsilon^2$$

s'étendent deux arcs balistiques sans aucune direction utile, ces arcs subsistent de $e = 1$ à $e = e_0 \simeq 0,925$.

2°) Développement pour $e \simeq 0$ ou $\sin v \simeq 0$

$$\begin{aligned} \text{tg } \varphi_s &= \frac{e \sin v (2 - e \cos v)}{4 + e \cos v - e^2 \cos^2 v} - \frac{2 e^3 \sin^3 v (6 - e^2 \cos^2 v)^2}{(3 + e \cos v)(4 + e \cos v - e^2 \cos^2 v)^4} \\ &\quad - \frac{13 e^5 \sin^5 v}{1536} + \text{ordre } (e^6 \sin^5 v) \end{aligned}$$

$$\text{tg } \varphi_i = \frac{e \sin v}{3 + e \cos v} + \frac{18 e^3 \sin^3 v}{(3 + e \cos v)^5} + \frac{2 e^5 \sin^5 v}{81} + \text{ordre } (e^6 \sin^5 v)$$

vrai pour φ_i mais non pour φ_i'

à titre de comparaison :

$$\text{tg } \Phi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} = \frac{e \sin E}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\varphi_s \text{ maximum } \simeq 26,2^\circ \text{ (réf. 0,5)}$$

$$\varphi_s - \varphi_i \text{ maximum } \simeq 12^\circ$$

$$\frac{\varphi_s - \varphi_i}{\Phi} \text{ maximum } < 0,2$$

Les figures 34 à 38 présentent

$$x_i = \frac{\operatorname{tg} \varphi_i}{\operatorname{tg} \Phi} \quad \text{et} \quad x_s = \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \Phi} \quad \text{en fonction de } \cos E = j$$

pour différentes valeurs de e (x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 sont des valeurs approchées utilisées pour le tracé des courbes).

On a toujours :

$$\frac{1 - e^2}{3 - 2ej - e^2} = \frac{1 + e \cos v}{3 + e \cos v} = x_1 \leq x_i$$

et

$$x_s \leq \frac{2 + e \cos v - e^2 \cos^2 v}{4 + e \cos v - e^2 \cos^2 v} \left(\leq \frac{9}{17} \right)$$

(il y a égalité entre x_i , x_s et ces valeurs limites pour $e = 0$ et pour $\sin v = 0$).

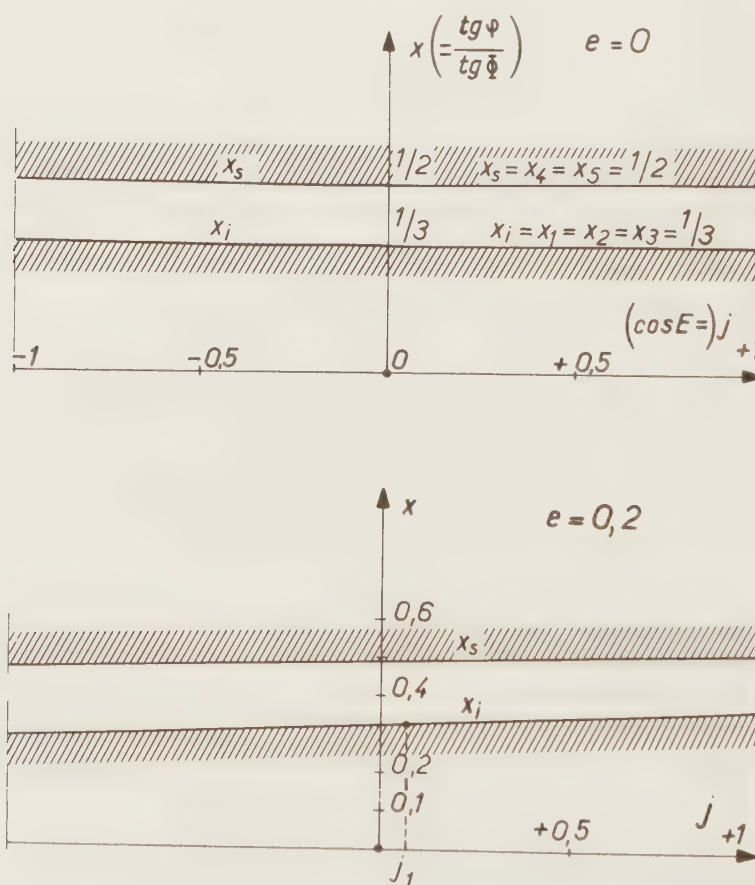


Fig. 34 - x_i et x_s en fonction de $j (= \cos E)$.

(x_i and x_s versus $j (= \cos E)$)

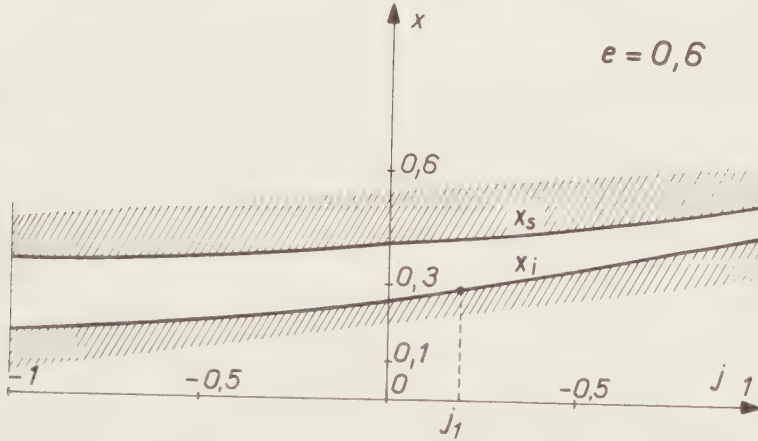
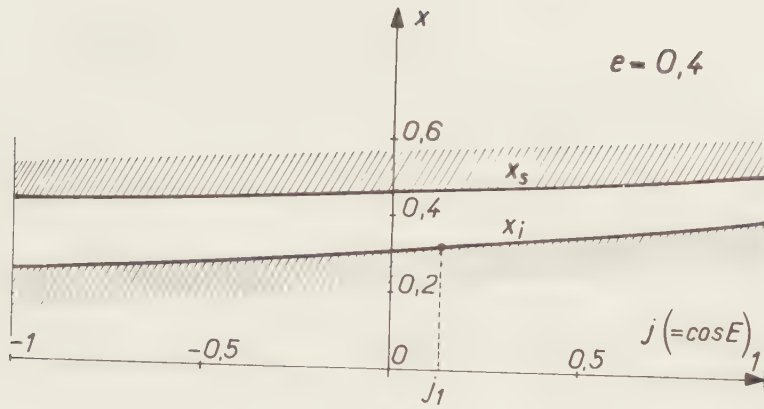
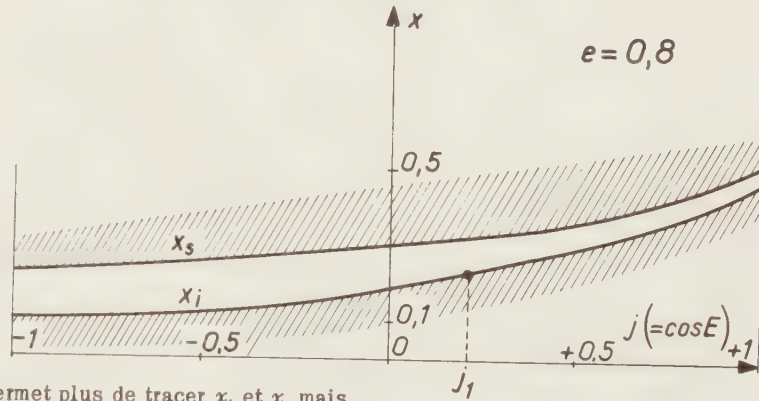


Fig. 35

Fig. 36

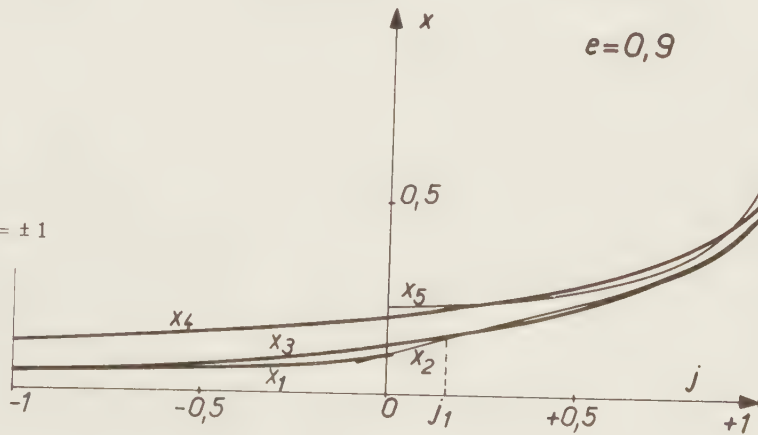


L'imprécision des calculs ne permet plus de tracer x_i et x_s mais

$$\begin{cases} x_s = x_4 \text{ pour } j = \pm 1 \\ x_s \leq x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_s \leq x_5 \\ x_s = x_5 \text{ pour } j = j_L \sim 0,8 \end{cases}$$

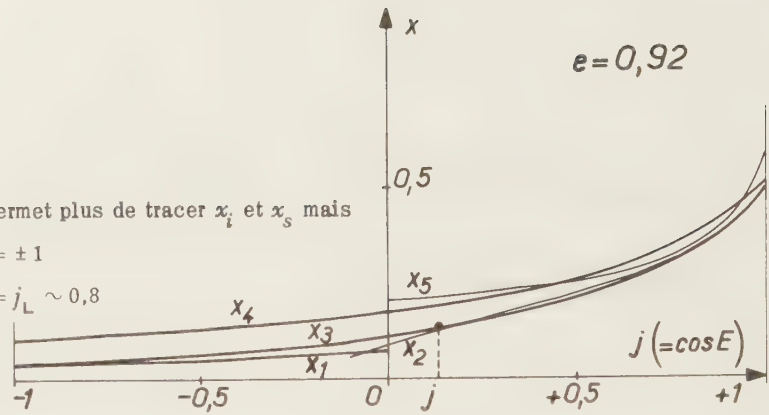
$$\begin{cases} x_i = x_1 = x_2 = x_3 \text{ pour } j = \pm 1 \\ x_i \geq x_1 \\ x_i \geq x_2 \\ (x_i - x_3)(j - j_1) \geq 0 \end{cases}$$



L'imprécision des calculs ne permet plus de tracer x_i et x_s mais

$$\begin{cases} x_s \leq x_4 & x_s = x_4 \text{ pour } j = \pm 1 \\ x_s \leq x_5 & x_s = x_5 \text{ pour } j = j_L \sim 0,8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i \geq x_1 \\ x_i \geq x_2 \\ x_i = x_3 \text{ pour } j = j_1 \text{ ou } \pm 1 \\ x_i \leq x_3 \text{ pour } j \leq j_1 \\ x_i \geq x_3 \text{ pour } j \geq j_1 \end{cases}$$



Pour $e = 0,94$ x_2 et x_5 se croisent en $j = 0,73$ et $j = 0,83$, entre ces limites il y a donc un arc sans directions utiles et $e_0 < 0,94$

$$(e_0 \sim 0,925)$$

Fig. 37

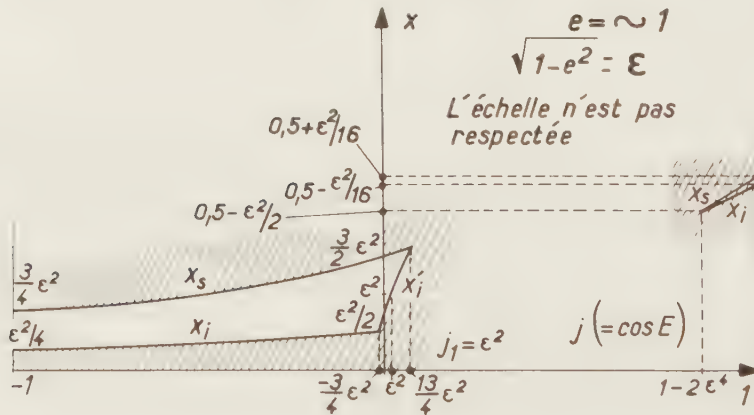
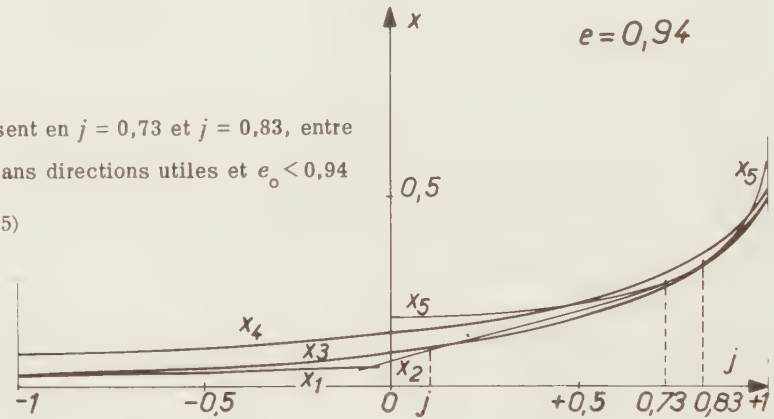
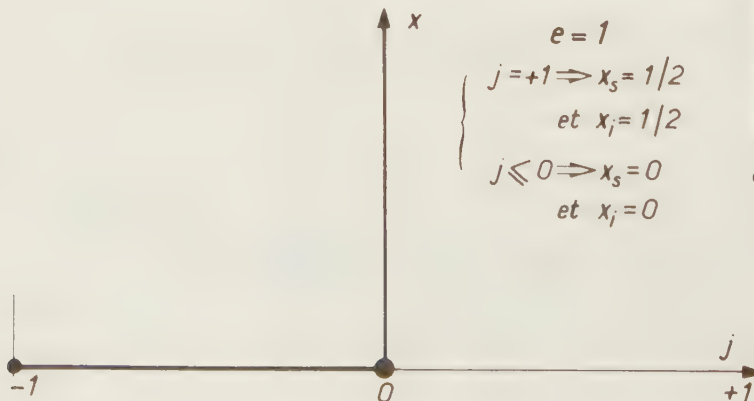


Fig. 38



COMMUTATIONS

Les commutations correspondent aux discontinuités de la valeur optimale de v : elles séparent deux impulsions successives, elles surviennent lorsque l'un des bords (variables) de l'angle utile vient se confondre avec la direction (fixe) d'impulsion (direction repérée par l'angle φ).

On distingue les commutations relatives à la direction φ_s , celles relatives à φ_i et celles relatives à φ_i' .

$v, E, \varphi, \varphi_s, \varphi_i, \varphi_i'$ seront relatifs au point d'arrivée sur l'ellipse intermédiaire de la commutation.

$v_1, E_1, \varphi_1, \varphi_{s_1}, \varphi_{i_1}, \varphi_{i_1}'$ seront relatifs au point de départ de l'ellipse intermédiaire de la commutation (bien entendu e, v, E, φ_s etc ... se rapportent à cette ellipse intermédiaire).

1°) Commutations relatives à φ_s :

Elles correspondent aux génératrices JK sur les images du domaine de manoeuvrabilité (fig. 30 et 31).

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} = \left(\frac{3+e}{3-e} \right) \left(\frac{4+e-e^2}{4-e-e^2} \right) + \text{ordre} \left(e^3 \sin^2 v \right)$$

ou mieux :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} = \frac{(3+e)(4+e-e^2)}{(3-e)(4-e-e^2)} \left[1 + \alpha \cos^2 \left(\frac{v-v_1}{2} \right) \right] + \text{ordre} \left(e^5 \sin^2 v, \sin^2 \frac{v-v_1}{2} \right)$$

$$\alpha = -\frac{31}{864} e^3 + \text{ordre} e^5$$

$$\alpha \text{ est déterminé par : } \begin{cases} e \sin v_0 = \frac{6s(1-2s^2)(3-4s^2)\sqrt{1-s^2}}{(3-5s^2)^2} \\ e \cos v_0 = \frac{3s^2(-7+21s^2-16s^4)}{(3-5s^2)^2} \\ \frac{(3+e)(4+e-e^2)}{(3-e)(4-e-e^2)} = \operatorname{tg}^2 \frac{v_0}{2} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \end{cases}$$

(s est un paramètre auxiliaire).

On obtient ainsi v_1 en fonction de v avec une erreur de l'ordre de $e^5 \sin^3 v \sin^2 \left(\frac{v-v_1}{2} \right)$

Si $e \simeq 0$: $v_1 \simeq \pi - v$

Si $e \simeq 1$: $\sin v \simeq 0$ (à cause des deux arcs balistiques) et $\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \simeq 4$

φ et φ_1 sont donnés par :

$$\varphi - \varphi_s = \varphi_1 - \varphi_{s_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \cos v > \cos v_1 \\ \pi & \text{si } \cos v < \cos v_1 \end{cases}$$

Remarque I :

Le cas limite $v = v_1$ est celui utilisé par LAW DEN [0,1] au cours de la description de la "spirale de LAW DEN"; en reprenant les équations déterminant α ci-dessus on y a : $v = v_1 = v_0$; $\sin \varphi_s = s$.

Remarque II :

Si l'on appelle poussée accélératrice une poussée dirigée dans la partie avant de l'angle utile et freinage une poussée dirigée dans la partie arrière, on voit que le sens des commutations φ_s est le suivant : elles font suivre une poussée accélératrice par une autre en un point plus haut ou bien un freinage par un autre en un point plus bas (fig. 39).

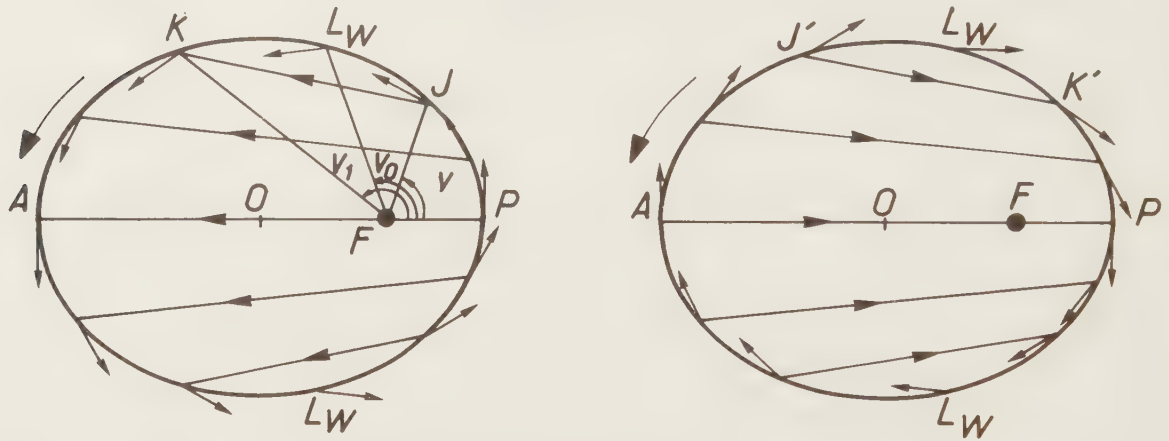


Fig. 39 - Les commutations φ_s .

1°) Cas des poussées accélératrices. 2°) Cas des freinages.

L_w : points et poussées utilisés au cours de la description de la "spirale de Lawden"

(The commutations φ_s : 1°) case of the accelerations. 2°) case of the decelerations)

2°) Commutations relatives à φ_i :

(Elles correspondent aux génératrices LM sur les images des domaines de manoeuvrabilité) (fig. 30 et 31).

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} = - \left(\frac{3+e}{3-e} \right)^2 + \text{ordre } (e^3 \sin^2 v)$$

ou mieux :

$$\cot \frac{v}{2} \cdot \cot \frac{v_1}{2} = - \left(\frac{3-e}{3+e} \right)^2 \left(1 + \beta \cos^2 \frac{v+v_1}{2} \right) + \text{ordre } \left(e^5 \sin^2 v \sin^2 \frac{v+v_1}{2} \right)$$

avec :

$$\beta = - \frac{16 e^3}{27} - \frac{40 e^5}{81} + \frac{128 e^6}{729} + (\text{ordre } e^7)$$

$$\left[\beta = \frac{1+x}{1-x} \cdot \left(\frac{3+e}{3-e} \right)^2 - 1 \text{ avec } x = \text{racine de } e^2 x^3 + 3 e x^2 + (3+e^2) x + 2 e = 0 \right]$$

Le calcul de v_1 par la dernière expression donne une erreur de l'ordre de $e^5 \sin^3 v \sin^2 \left(\frac{v+v_1}{2} \right)$

$$e=0 : v_1 = \pi + v$$

$$e \simeq 1 : \sin v \simeq 0 \text{ et } \operatorname{tg} \frac{v}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \simeq -4$$

φ et φ_1 sont donnés par :

$$\varphi = \varphi_i$$

$$\varphi_1 = \varphi_{i_1} + \pi.$$

Les commutations φ_i suivent donc une poussée accélératrice et précèdent un freinage (fig. 40).

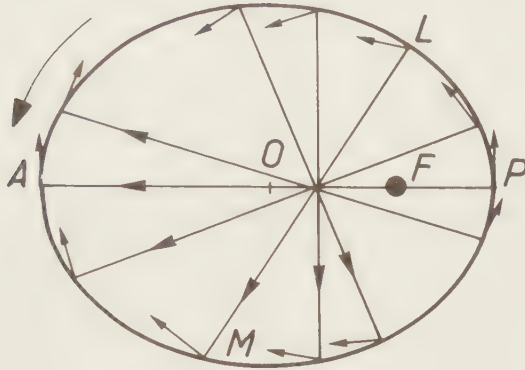


Fig. 40 - Les commutations φ_i .

3°) **Commutations relatives à φ'_i** (donc pour $e > e_0 \simeq 0,925$).

(Elles correspondent aux génératrices analogues à PN sur l'image pour $e \simeq 1$ du domaine de manœuvrabilité) (fig. 31).

Posons $\varepsilon = \sqrt{1-e^2}$ et utilisons un paramètre Z (avec $|Z| \ll \frac{\varepsilon}{2}$) pour paramètre de description :

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_i &= Z + \varepsilon + (\text{ordre } \varepsilon^3) \\ \varphi'_{i_1} &= Z - \varepsilon + (\text{ordre } \varepsilon^3) \end{aligned} \right\} |\varphi'_i - \varphi'_{i_1}| = 2\varepsilon + (\text{ordre } \varepsilon^3)$$

$$\left. \begin{aligned} E &= -4\varepsilon Z + \operatorname{sgn} \varphi'_i \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2 - Z^2 \right) + (\text{ordre } \varepsilon^4) \\ E_1 &= -4\varepsilon Z + \operatorname{sgn} \varphi'_{i_1} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2 - Z^2 \right) + (\text{ordre } \varepsilon^4) \end{aligned} \right\} E + E_1 = -8\varepsilon Z + (\text{ordre } \varepsilon^4)$$

$$\varphi = \varphi'_i ; \quad \varphi_1 = \varphi'_{i_1} + \pi$$

Les commutations relatives à φ'_i comme celles relatives à φ_i suivent une poussée accélératrice et précèdent un freinage (il ne peut donc jamais y en avoir plus d'une seule).

Pour les commutations φ_i (ou φ'_i si $e > e_0 \simeq 0,925$) le cas $v_1 = -v$ est simple, on y obtient :

$$\cos v = \cos v_1 = \text{racine de} : e^2 x^3 + 3ex^2 + (3+e)x^2 + 2e = 0$$

d'où :

$$\cos E = \cos E_1 = \text{racine de} : e^2 y^3 + (e^3 - 3e)y^2 + (3 - 2e^2)y = e(1 - e^2)$$

et
$$\varphi = \varphi_i \text{ (ou } \varphi_i') = \text{Arc tg } \frac{e \sin v}{3 + 2e \cos v} = \text{Arc tg } \frac{\cos E}{\sin v}.$$

Ce cas est utilisé dans le transfert entre ellipses égales, ils correspondent au point j_1 sur les figures 34 à 37.

En [8] est donnée une démonstration du fait qu'entre orbites elliptiques les transferts optimaux (à durée indifférente) sont toujours composés d'impulsions, il n'y a jamais d'arc de poussée optimal (la célèbre "Spirale de LAWREN" (réf. 0,1) elle-même admet une perte du 4^e ordre par rapport aux transferts impulsions).

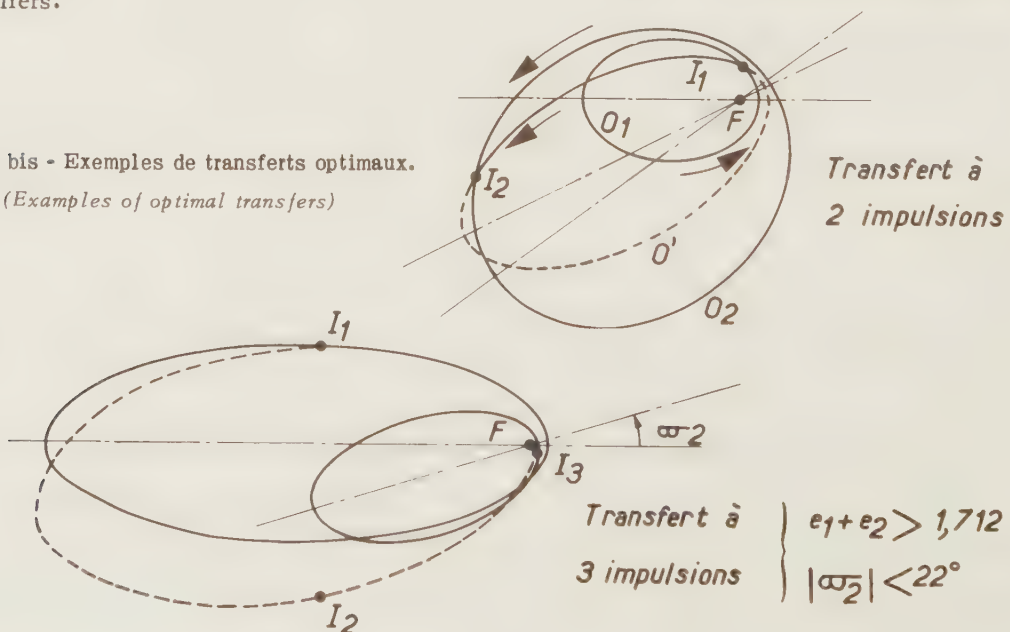
Les transferts optimaux entre orbites coplanaires sont donc composés d'une suite d'impulsions (dirigées à l'intérieur des "angles utiles") séparées les unes des autres par les commutations ci-dessus (survenant lorsque l'un des bords (variables) de l' "angle utile" vient se confondre avec la direction d'impulsion).

Le nombre optimal d'impulsions reste limité, il n'y a jamais plus de trois impulsions finies [dans ce dernier cas, il y a évidemment deux commutations, l'une est une commutation φ_s l'autre une commutation φ_i (ou φ_i')] ; il y a des cas à deux impulsions finies et une ou deux autres infiniment petites, ce sont les cas de transferts optimaux "par l'infini" utilisant deux quasi-paraboles intermédiaires et, éventuellement, une grande ellipse lointaine entre les deux quasi-paraboles.

On voit ainsi qu'il est aisé de construire des exemples de transferts optimaux à partir d'une ellipse intermédiaire et des commutations ci-dessus, il suffit en effet de choisir sur l'ellipse un couple v, v_1 et d'effectuer à partir de l'ellipse les impulsions δ et δ_1 dans les directions φ et φ_1 (la première étant effectuée à rebours : l'impulsion δ conduit de l'orbite O_1 initiale à l'ellipse intermédiaire); de l'orbite O_1 à l'orbite O_2 la suite des deux impulsions δ et δ_1 constitue le transfert optimal sous réserve que $|\delta|$ et $|\delta_1|$ satisfassent à une inéquation de la forme $|\delta_1| \leq f|\delta|$, f étant une fonction non croissante de $|\delta|$.

Par contre, le problème inverse (qui est le problème habituel du transfert) : trouver la ou les ellipses intermédiaires lorsque les orbites initiale et finale sont données (fig. 40 bis) n'est généralement résolu que de manière implicite; nous allons en donner les solutions dans quelques cas particuliers.

Fig. 40 bis - Exemples de transferts optimaux.
(Examples of optimal transfers)



III,2.1. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES QUASI-CIRCULAIRES VOISINES.

Une ellipse du plan de transfert étant caractérisée par trois paramètres (par exemple a , e et ϖ) elle peut être associée à un point dans un espace à trois dimensions. Nous utiliserons pour point associé le point de coordonnées cylindriques ρ , θ et z (fig. 41)

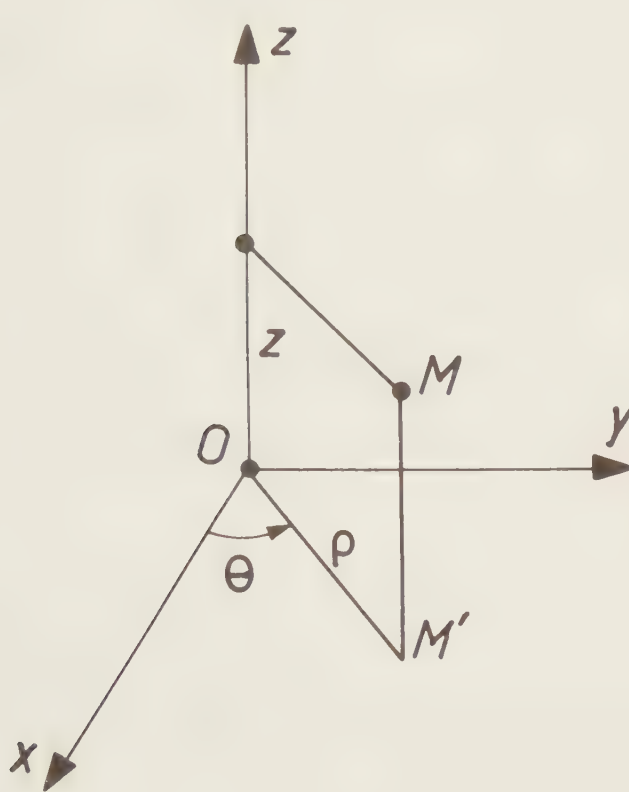


Fig. 41 - Les coordonnées cylindriques ρ, θ et z

$$\rho = e + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} + \dots$$

(Cylindrical coordinates ρ, θ and z)

avec

$$\rho = \log \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\theta = \varpi$$

$$z = \log b.$$

Il est alors aisé de s'assurer que le domaine de manœuvrabilité propre à un point M (domaine analogue à celui de la figure 30) est, au second ordre près en e , un cylindre circulaire d'axe Oz , de rayon $2/nb$, s'étendant de part et d'autre de l'origine jusqu'aux cotes $z = \pm 2/nb$; ce cylindre ayant toujours une hauteur égale à son diamètre il en résulte que si M_1 et M_2 sont les points associés aux orbites initiale et finale, il convient de distinguer les deux cas suivants :

- 1°) $\overrightarrow{M_1 M_2}$ a une pente comprise entre -1 et $+1$ (à l'ordre e^2 près);
- 2°) $\overrightarrow{M_1 M_2}$ a une pente supérieure à $+1$ ou inférieure à -1 (à l'ordre e^2 près).

Nous poserons $\mathcal{E}$ = infiniment petit principal

$$= \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left| \log \frac{b_2}{b_1} \right|$$

et nous dirons de deux orbites sécantes qu'elles sont quasi-tangentes si leurs angles d'intersection sont d'ordre $\mathcal{E}^2$ (il leur correspond un vecteur $\overrightarrow{M_1 M_2}$ de pente $\pm [1 + (\text{ordre } \mathcal{E}^2)]$).

Etude du premier cas :

$\overrightarrow{M_1 M_2}$ a une pente comprise entre -1 et $+1$.

M_1 et M_2 se projettent en M'_1 et M'_2 sur le plan Oxy (fig. 42).

Le coût C_2 du transfert est évidemment :

$$C_2 = \frac{n_1 b_1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{M'_1 M'_2} \right| (1 + \text{ordre } \mathcal{E}).$$

Le déplacement optimal de M depuis M_1 jusqu'à M_2 a donc lieu dans le plan vertical de $M_1 M_2$, (à $\mathcal{E}^3$ près), d'abord sur un segment $M_1 B$ de pente $+1$ (poussée accélératrice) puis, après une commutation φ_i , sur un segment $B M_2$ de pente -1 (freinage) (voir fig. 42).

REMARQUE :

des trajets du genre $M_1 D E F M_2$ dans le plan vertical de $M_1 M_2$ ne font augmenter la consommation C_2 que d'ordre $\mathcal{E}^2$ par rapport au cas optimal (augmentation relative d'ordre $\mathcal{E}$: en effet, plus M est bas, plus et les domaines de manœuvrabilité sont petits).

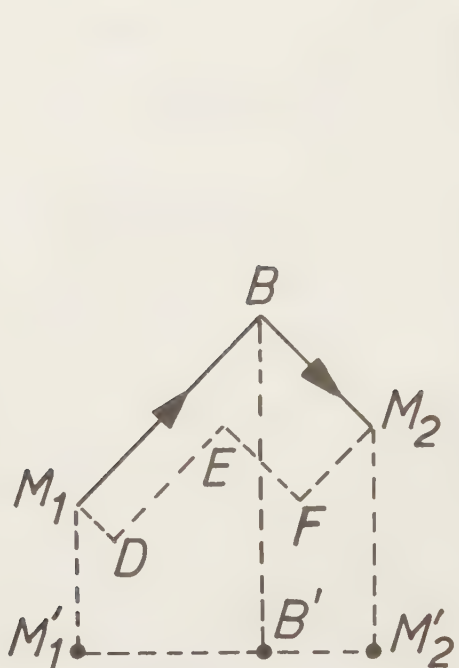


Fig. 42 - Déplacement de M dans le plan vertical de M_1M_2 .

(M displacement in the vertical plane M_1M_2)

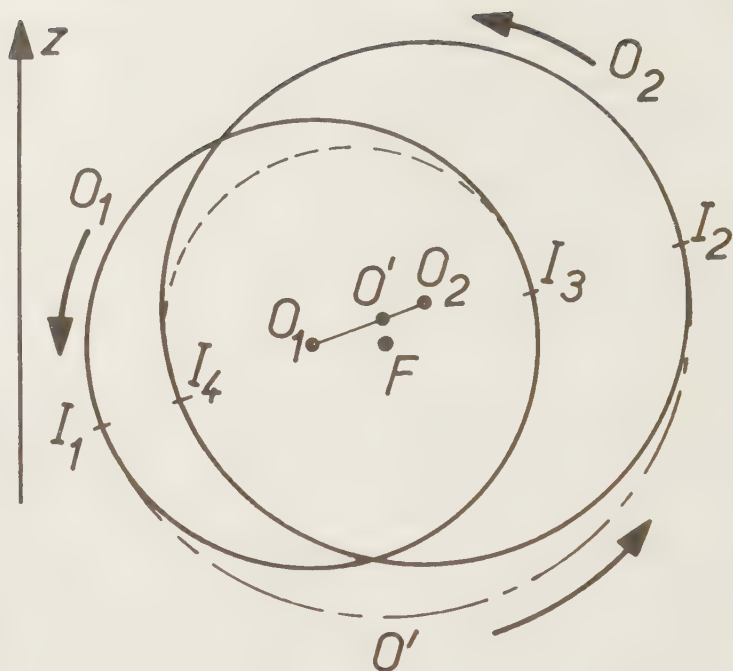


Fig. 43 - Construction de l'orbite intermédiaire O' .

(Construction of the intermediate orbit O')

On en déduit la construction de l'orbite intermédiaire optimale dans ce premier cas (fig. 43).

Le Centre O' et l'ellipse intermédiaire est (avec une erreur de l'ordre de ϵ^2) sur le segment O_1O_2 joignant les centres des deux orbites données, il est tel que :

$$\vec{FO'} = \frac{1}{2 |O_1O_2|} \left[\vec{FO_1} (b_1 - b_2 + |O_1O_2|) + \vec{FO_2} (b_2 - b_1 + |O_1O_2|) \right] + \text{ordre } \epsilon^2$$

Les impulsions ont lieu aux points I_1 et I_2 quasi-diamétralement opposés (et tels que $I_1I_2 \simeq // O_1O_2$), les deux orbites données sont sécantes, l'ellipse intermédiaire leur est quasi-tangente (extérieurement).

Remarque I :

Il est bien normal que les points I_1 et I_2 soient quasi-diamétralement opposés puisqu'ils se correspondent dans une commutation φ_i .

Remarque II :

Si n et b sont les éléments de l'ellipse intermédiaire ($b = b_1 + 0$, $O' + \text{ordre } \epsilon^2 = b^2 + O_2 O'$ + ordre ϵ^2) les impulsions en I_1 et I_2 sont respectivement :

$$\text{en } : I_1 : \frac{n_1}{2} O_1 O' (1 + \text{ordre } \epsilon) = \frac{n_1 b_1 + nb}{4} M_1' B' (1 + \text{ordre } \epsilon^2)$$

$$\text{en } : I_2 : \frac{n_2}{2} O_2 O' (1 + \text{ordre } \epsilon) = \frac{n_2 b_2 + nb}{4} M_2' B' (1 + \text{ordre } \epsilon^2)$$

$$\text{et au total : } C_2 = \left(\frac{n_1 b_1 + nb}{4} M_1' B' + \frac{n_2 b_2 + nb}{4} M_2' B' \right) (1 + \text{ordre } \epsilon^2).$$

$M_1' B$ et $B' M_2$ étant mesurés sur la figure 42.

Remarque III :

Conformément à la remarque faite à propos de la figure 42, le transfert par l'ellipse intermédiaire en pointillé (fig. 43) avec deux impulsions en les points I_3 et I_4 n'est guère plus coûteux que le transfert optimal (le supplément relatif de coût est du premier ordre).

Etude du deuxième cas :

$\overrightarrow{M_1 M_2}$ a une pente supérieure à +1 (ou inférieure à -1 : cas retour inverse de l'autre et qui sera donc négligé).

La connaissance du domaine de manoeuvrabilité à l'ordre e^2 près (cylindre circulaire vertical de centre l'origine, de hauteur et diamètre $4/nb$) ne suffit pas à déterminer le transfert optimal : on voit simplement qu'il correspond à une suite de poussées accélératrices (correspondant à des segments de pente +1 dans le domaine $\rho\theta z$), mais par contre, on connaît déjà le coût du transfert avec une erreur relative d'ordre ε^2 :

$$C_2 = \frac{n_1 + n_2}{4} (b_2 - b_1) (1 + \text{ordre } \varepsilon^2)$$

Pour déterminer le transfert optimal, nous poserons :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu}{b}} &= \mathcal{B} = \text{vitesse circulaire à la distance : } r=b \\ &= \text{vitesse du satellite à la distance : } r = \frac{2ab}{a+b} \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{d\mathcal{B}}{dC} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{b^3}} \frac{db}{dC} = -(1-e^2)^{-\frac{3}{4}} \left(\cos \varphi + \frac{e}{2} \cos (v - \varphi) - \frac{e}{2} \cos E \cos \varphi \right)$$

soit :

$$dC = -d\mathcal{B} \left[1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{8} e^2 \sin^2 v + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{e \sin v}{2} \right)^2 + \text{ordre } (e^3; \varphi^4) \right].$$

Il suffit de respecter toujours $\left| \varphi - \frac{e \sin v}{2} \right| \ll e \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ce qui dépasse largement les limites de "l'angle utile" et même de l'angle allant de la tangente à l'horizontale locale) pour que l'on puisse vérifier :

$$(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2) (1 - \varepsilon^2)^{3/4} \leq C_2 \leq \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2$$

$-\Delta \mathcal{B}$ est donc une approximation au second ordre de la vitesse caractéristique nécessaire.

L'optimum s'obtient pour C_2 minimum (par définition), nous cherchons donc le minimum de :

$$C_2 = \int_{M_1}^{M_2} dC = - \int_{M_1}^{M_2} d\mathcal{B} \left[1 - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{8} e^2 \sin^2 v + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{e \sin v}{2} \right)^2 + \text{ordre } (e^3; \varphi^4) \right]$$

mais :

$$- \int_{M_1}^{M_2} d\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_2 \text{ est fixé.}$$

Il suffit donc de minimiser :

$$-\frac{3}{16} S = C_2 - \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \int_{M_1}^{M_2} d\mathcal{B} \left[\frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{8} e^2 \sin^2 v - \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{e \sin v}{2} \right)^2 + \text{ordre } (e^3; \varphi^4) \right]$$

mais

$$\mathcal{B} = \sqrt{\frac{\mu}{b}} ; d\mathcal{B} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{b^3}} db = -\frac{1}{2} \mathcal{B} dz.$$

Si donc nous négligeons les termes d'ordre e^3 et si nous recherchons le déplacement optimal de la projection M'_1 de M depuis M'_1 jusqu'à M'_2 (déplacement qui est la projection de l'hélice de pente +1 (+ ordre e^2) de M_1 à M_2 (fig. 44) il nous faut résoudre le problème suivant :

Trouver l'arc (fig. 45) dont les extrémités M'_1 et M'_2 sont données, dont la longueur :

$$\int_{M'_1}^{M'_2} ds = \int_{M_1}^{M_2} dz = z_2 - z_1$$

est fixée et qui est tel que l'intégrale :

$$S = \int_{M'_1}^{M'_2} ds \left[2 \rho^2 - \rho^2 \sin^2 \nu - \frac{4}{3} \left(\varphi - \frac{e \sin \nu}{2} \right)^2 \right]$$

soit maximale.

(ν est égal, avec une erreur d'ordre e , à l'angle de la tangente en M' avec le rayon vecteur) (cf. fig. 45).

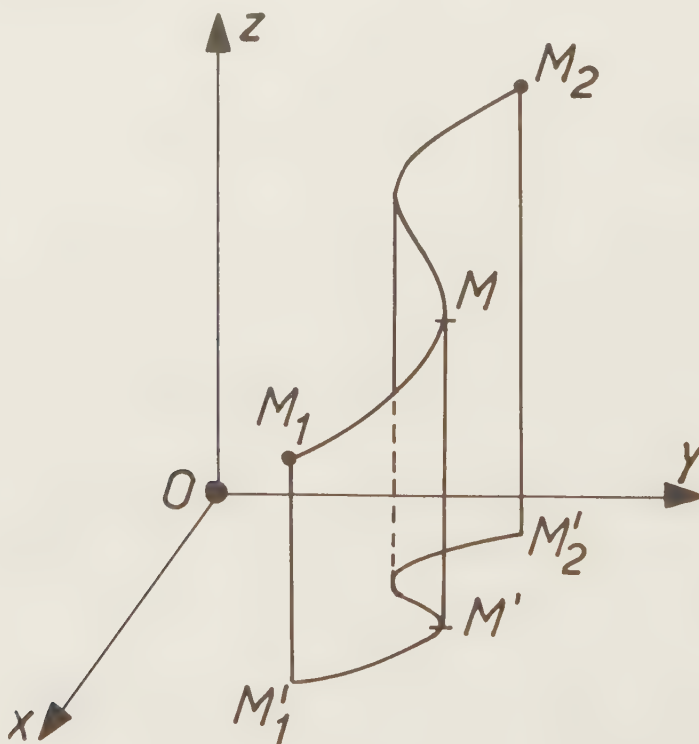


Fig. 44 - Déplacement du point M . de M_1 à M_2 .

(Displacement of M from M_1 to M_2).

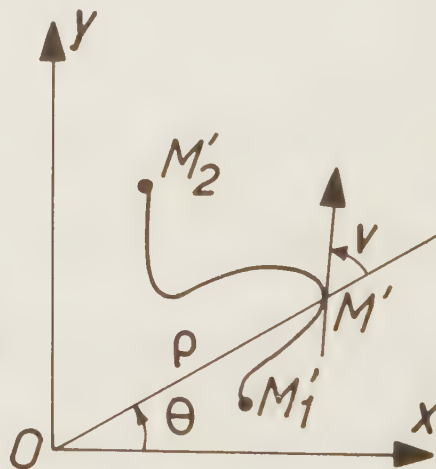


Fig. 45 - Déplacement du point M' de M'_1 à M'_2 .

(Displacement of M' from M'_1 to M'_2 .)

Une première condition est évidemment : $\varphi = \frac{e \sin \nu}{2} + \text{ordre } e\sqrt{e}$

de $\frac{e \sin \nu}{2}$.

donc : φ s'écarte peu de la valeur φ_s elle-même voisine

Il nous faut donc maximiser $S = \int_{M_1'}^{M_2'} ds \cdot \rho^2 (1 + \cos^2 v)$ dans les conditions données.

Ce problème peut se traiter par la méthode de PONTYAGIN :

Paramètre de description : S

Paramètre de commande : v

Paramètres d'état : ρ, θ, s et $S(s) = \int_{M_1'}^{M_2'} ds \cdot \rho^2 (1 + \cos^2 v)$

Conditions aux limites : $s = 0 : \rho = \rho_1 ; \theta = \theta_1$

et : $s = s_2 = z_2 - z_1 : \rho = \rho_2 ; \theta = \theta_2$

Quantité à maximiser : $S(s_2) = \int_{M_1'}^{M_2'} ds \cdot \rho^2 (1 + \cos^2 v)$

On obtient : $\frac{d\rho}{ds} = \cos v ; \frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin v}{\rho} ; \frac{ds}{ds} = 1 ; \frac{dS}{ds} = \rho^2 (1 + \cos^2 v)$

donc : $\mathcal{H} = \rho_p \cos v + p_\theta \frac{\sin v}{\rho} + p_s + p_s \rho^2 (1 + \cos^2 v)$

On veut obtenir S_2 maximum il faut donc prendre v tel que $\mathcal{H}$ soit minimum par rapport à v .

D'autre part :

$$\frac{dp_p}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = p_\theta \frac{\sin v}{\rho^2} - 2 p_s \rho (1 + \cos^2 v)$$

$$\frac{dp_\theta}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{dp_s}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{dp_s}{ds} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = 0 : p_s \equiv p_{s \text{ final}} = -1$$

donc :

$$\mathcal{H} = \rho_p \cos v + p_\theta \frac{\sin v}{\rho} + p_s - \rho^2 (1 + \cos^2 v)$$

p_θ et p_s étant fixes, $\frac{dp_p}{ds}$ étant égal à $\frac{p_\theta}{\rho^2} \sin v + 2 \rho (1 + \cos^2 v)$
 $\mathcal{H}$ est minimum par rapport à v donc :

$$- \rho_p \sin v + \frac{p_\theta}{\rho} \cos v + 2 \rho^2 \sin v \cos v = 0$$

en dérivant cette expression par rapport à s nous obtenons :

$$-2\rho \sin^3 v - \frac{p_\theta}{\rho^2} + \frac{dv}{ds} \left[2\rho^2 (\cos^2 v - \sin^2 v) - \frac{p_\theta}{\rho} \sin v - p_\rho \cos v \right] = 0$$

ces deux dernières équations donnent :

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{\sin v}{\rho}$$

or, justement, $\frac{ds}{ds} = \frac{ds}{ds}$: $(\theta + v)$ est constant tant qu'il n'y a pas de discontinuités de v donc l'arc optimal (fig. 45) est composé d'une succession de segments qui correspondent à des impulsions pour le transfert considéré.

Discontinuités de v

Il y a discontinuité de v lorsque $\mathcal{H}(v)$ admet deux minimums égaux pour deux valeurs distinctes de v .

Or :

$$\mathcal{H}(v) = p_\rho \cos v + p_\theta \frac{\sin v}{\rho} + p_s - \rho^2 (1 + \cos^2 v)$$

l'étude est aisée, $\mathcal{H}(v)$ n'admet deux minimums égaux que si $p_\rho = 0$, $\mathcal{H}(v)$ est alors minimum

pour $p_\theta \frac{\sin v}{\rho} + \rho^2 \sin^2 v$ minimum c'est-à-dire pour $\sin v = -\frac{p_\theta}{2\rho^3}$; comme d'autre part :

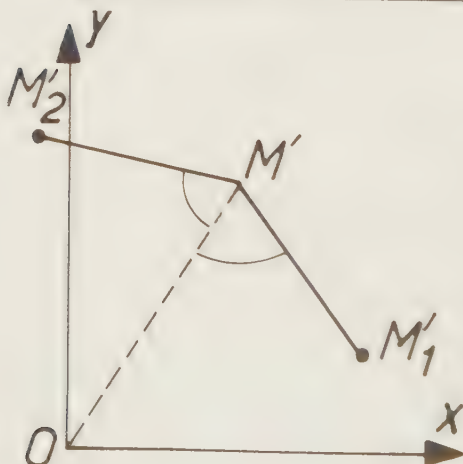
$$\frac{dp_\rho}{ds} = \frac{p_\theta \sin v}{\rho^2} + 2\rho (1 + \cos^2 v) \text{ et évidemment (si } p_\rho \neq 0) : \operatorname{sgn} \cos v = -\operatorname{sgn} p_\rho$$

on en déduit le sens de la commutation : $\frac{dp_\rho}{ds} > 0$, $\cos v$ passe d'une valeur positive à une valeur négative

$$\text{D'où : il y a commutation si et seulement si : } \begin{cases} p_\rho = 0 \\ |p_\theta| < 2\rho^3 \end{cases}$$

$$v \text{ passe alors brusquement de } \operatorname{Arc} \sin \left(-\frac{p_\theta}{2\rho^3} \right)$$

$$\text{à } \pi - \operatorname{Arc} \sin \left(-\frac{p_\theta}{2\rho^3} \right)$$



Le trajet optimal de M'_1 à M'_2 cherché est donc composé d'une suite de segments, les angles saillants de la ligne brisée ainsi formée ayant tous leur bissectrice passant par O (fig. 46).

Fig. 46 - Disposition des segments successifs.
(Disposition of the successive segments)

Suite des commutations :

Plaçons-nous en un point M' de commutation :

$$p_p = 0$$

$$p_\theta = -2\rho^3 \sin v_{M'}$$

et cherchons l'évolution de p_p lors de la description de la demi-droite $M'IM''$... (fig. 47).

Appelons C le point courant et posons :

$$\overrightarrow{IC} = s_c - s_I = s_1 ; \quad OI = \rho_1$$

nous obtenons :

$$\frac{dp_p}{ds} = \frac{dp_p}{ds_1} = \frac{p_\theta \sin v}{\rho^2} + 2\rho(1 + \cos^2 v)$$

Soit :

$$\frac{dp_p}{ds_1} = \frac{2}{\rho^3} \left[3\rho_1^2 s_1^2 + 2s_1^4 - \rho_1^2 (IM')^2 \right] \text{ d'où : } p_p = \frac{2s_1}{\rho} \left[s_1^2 - (IM')^2 \right]$$

p_p s'annule deux fois après M' : d'abord en I mais la condition $|p_\theta| < 2\rho^3$ n'y est pas satisfaite, il n'y a pas commutation; puis en M'' symétrique de M' par rapport à I , les conditions sont les mêmes qu'en M' et il y a commutation.

L'étude, selon la méthode de PONTRYAGIN conduit donc au résultat suivant (fig. 48) :

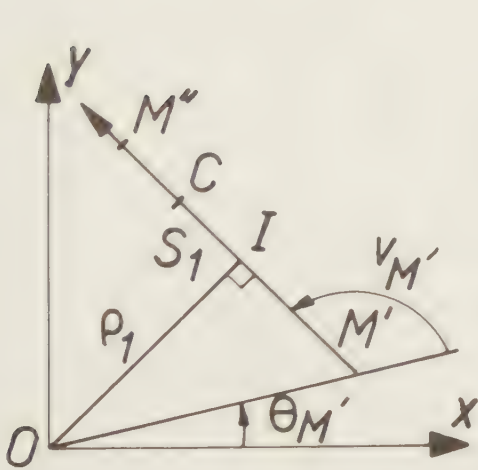


Fig. 47 - Etude de la suite des commutations.

(Study of the succession of the commutations)

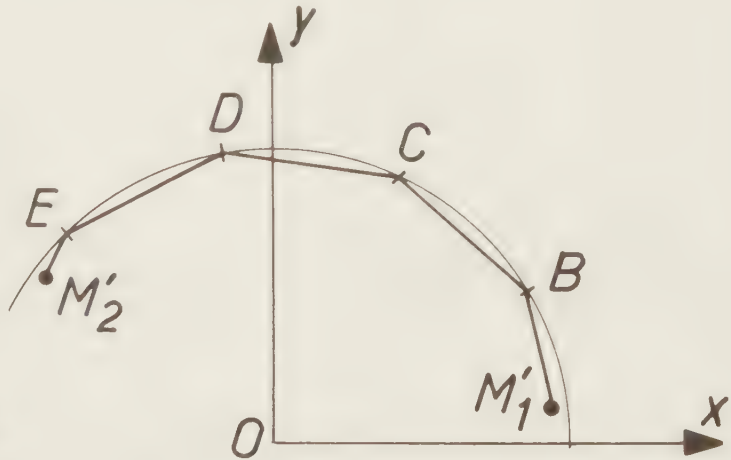


Fig. 48 - Ligne polygonale régulière optimale

(au sens de PONTRYAGIN)

(Optimal regular polygonal line (optimality in the sense of PONTRYAGIN))

Le trajet optimal de M'_1 à M'_2 (trajet qui, rappelons le, est de longueur donnée et rend

$$S = \int_{M'_1}^{M'_2} \rho^2 (1 + \cos^2 v) ds$$

maximum) est une ligne polygonale régulière de centre O : $M'_1 B C D E M'_2$ (ou à la limite un arc de cercle de centre O , arc qui correspond à la spirale de LAWREN (réf. 0,1); on vérifie en effet pour cette spirale lorsque l'excentricité est faible : $v \simeq 90^\circ$ et e croît très lentement).

Mais l'étude n'est pas terminée car il y a en général plusieurs solutions que nous devons comparer.

Examinons donc une portion FCG de la ligne polygonale régulière BCD , (fig. 49), si $CF + CG > BC$, on peut trouver sur CF et CG deux points H et J tels que $CH + CJ = BC$, dans ce cas, $OH = OJ$, le trajet $FHIJG$ dont la portion pointillée $H I J$ est symétrique de $H C J$ par rapport à OK (bissectrice de HOJ) conduit à la même valeur de l'intégrale : $S = \int_F^G \rho^2 (1 + \cos^2 \nu) ds$ (ν étant, rappelons le, l'angle en chaque point du rayon vecteur et de la tangente), or, le trajet $FHIJG$ n'est pas optimal puisqu'il ne satisfait pas aux conditions de PONTYAGIN (il n'est pas en effet une ligne polygonale régulière de centre O), le trajet équivalent FCG n'est donc pas non plus optimal donc seuls peuvent être optimaux les trajets de longueur inférieure ou égale à l'un des côtés de la ligne polygonale régulière, en particulier les trajets comportant trois segments ou plus (c'est-à-dire correspondant à des transferts à trois impulsions ou plus) ne sont pas optimaux.

Le problème est presque achevé, en effet, on sait que le trajet optimal est composé de deux segments $M'_1 C$ et CM'_2 dont la somme des longueurs est fixée, d'où un premier lieu de C : l'ellipse (E) de foyers M'_1 et M'_2 et de grand axe la longueur $(Z_2 - Z_1)$ fixée (fig. 50).

D'autre part, la bissectrice de l'angle saillant $M'_1 C M'_2$ passe par O , C est donc le pied de l'une des quatre normales à (E) issue de O .

Enfin, on doit avoir $M'_1 C + CM'_2 \leq$ longueur l d'un côté de la ligne polygonale de centre O dont $M'_1 C M'_2$ fait partie.

D'où le résultat final (fig. 50).

C est le point de (E) le plus éloigné de O

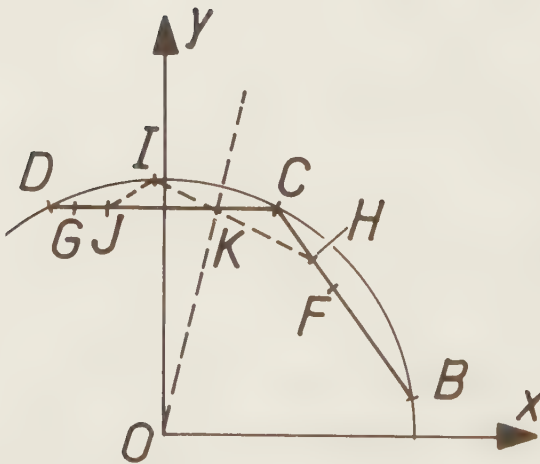


Fig. 49 - Etude de l'optimalité de la ligne polygonale régulière.

(Study of the optimality of the regular polygonal line)

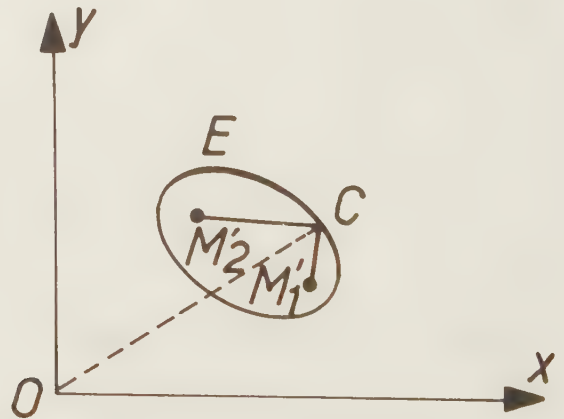


Fig. 50 - Disposition optimale $M'_1 C M'_2$

(Optimal disposition $M'_1 C M'_2$)

Il n'y a en général qu'une solution, toutefois, il y en a deux équivalentes (à l'ordre $\mathcal{E}^4$ près) si O est sur le petit axe de (E) entre les centres des deux grands cercles surosculateurs (dans ce cas $M'_1 C + M'_2 C =$ longueur l).

On en déduit la construction (fig. 51) de l'ellipse intermédiaire optimale dans le second cas ($\overrightarrow{M'_1 M'_2}$ de pente supérieure à $+1$).

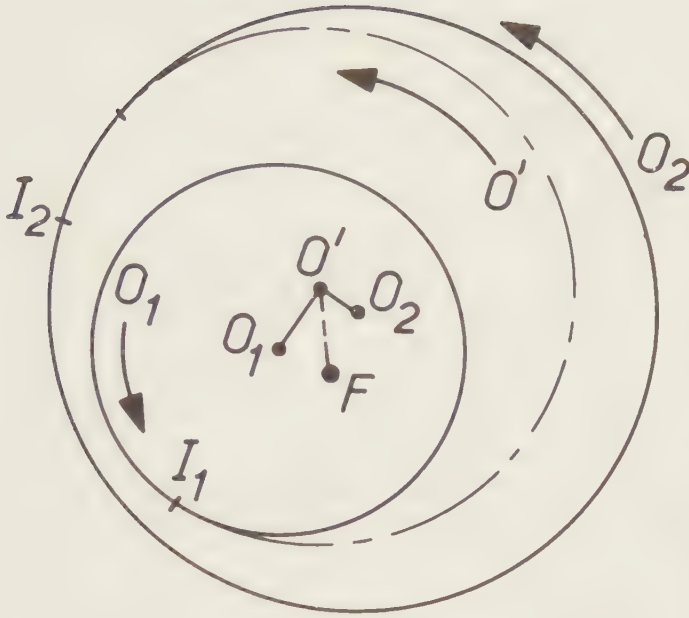


Fig. 51 - Construction de l'orbite intermédiaire O' .
(Construction of the intermediate orbit O')

Le centre O de l'ellipse intermédiaire est tel que :

- 1°) $O, O' + O'O_2 = a_2 - a_1 + (\text{ordre } a_1 \varepsilon^2)$,
- 2°) $O'F$ est maximum compte tenu de la condition 1°).

La commutation correspondante est une commutation φ_s et la droite joignant les points d'impulsion est quasi parallèle à $O'F$, de même $O'O_1 \simeq \parallel I_1 F$ et $O'O_2 \simeq \parallel I_2 F$

Les deux orbites données sont non sécantes ou quasi-tangentes, l'ellipse intermédiaire leur est quasi-tangente.

REMARQUE : nous avons vu que dans ce cas, l'optimum était très "plat", il suffit en effet de toujours pousser entre l'horizontale et la tangente locales (ce qui laisse donc un grand choix pour le transfert) pour que l'on ait toujours :

$$(\beta_1 - \beta_2)(1 - \varepsilon^2)^{3/4} \leq C_2 \leq \beta_1 - \beta_2$$

$$\left(\beta = \sqrt{\frac{\mu}{b}} ; \varepsilon = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \left| \log \frac{b_2}{b_1} \right| \right)$$

On s'écarte donc alors peu de l'optimum.

Ainsi, l'utilisation de la "Spirale de LAWZEN", dont nous avons parlé ci-dessus, provoque une pénalisation relative de $\frac{e_1^2}{640} \propto 4$ lorsqu'elle est utilisée sur un arc d'angle au centre α (pour α petit).

Etude du 3^e cas : pente $\overrightarrow{M_1 M_2} = \pm [1 + \text{ordre } \varepsilon^2]$

il y a là entre les deux cas ci-dessus un cas intermédiaire à une impulsion, les deux orbites sont alors quasi-tangentes et l'impulsion a lieu au point d'intersection le plus bas.

(elle vérifie évidemment $(\beta_1 - \beta_2)(1 - \varepsilon^2)^{3/4} \leq C_2 \leq \beta_1 - \beta_2$).

On peut étudier les limites avec plus de précision, les résultats obtenus sont alors :

Soit δ la longueur de la perpendiculaire commune à $\overrightarrow{M_1 M_2}$ et $\overrightarrow{OZ}$ (fig. 52).

1^{er} cas :
pente $\overrightarrow{M_1 M_2} > 1 + \frac{13\delta^2}{96} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2$

Le transfert est du second type : deux poussées accélératrices séparées par une commutation φ_s .

2^e cas : $1 + \frac{\delta^2}{9} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2 \leq \text{pente } \overrightarrow{M_1 M_2} \leq 1 + \frac{13}{96} \delta^2 + \text{ordre } \delta \varepsilon^2$

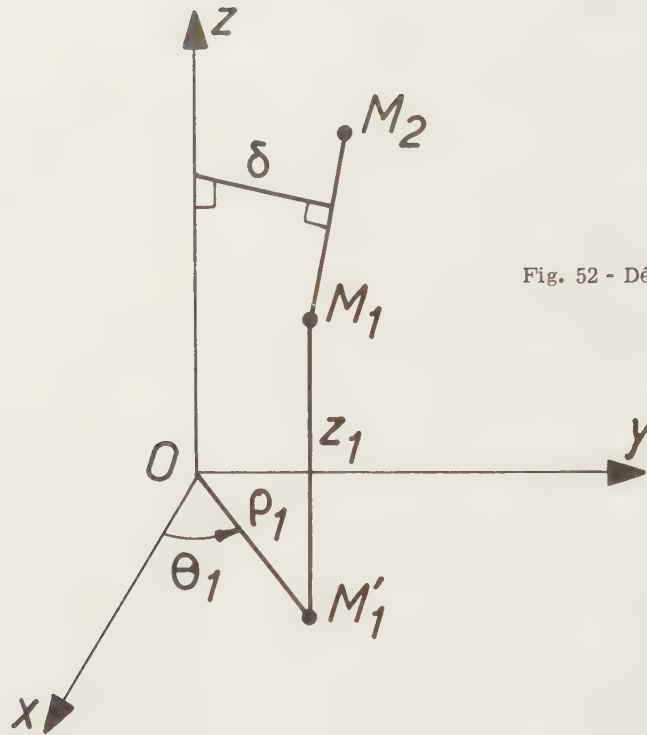


Fig. 52 - Définition de δ .

Le transfert est du troisième type : une poussée accélératrice au point d'intersection le plus bas.

$$\underline{3^e \text{ cas}} : \left| \text{pente } \overrightarrow{M_1 M_2} \right| < 1 + \frac{\delta^2}{9} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2.$$

Le transfert est du premier type : une poussée accélératrice, une commutation φ_i puis un freinage.

$$\underline{4^e \text{ cas}} : - \left(1 + \frac{13\delta^2}{96} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2 \right) \leq \text{pente } \overrightarrow{M_1 M_2} \leq - \left(1 + \frac{\delta^2}{9} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2 \right)$$

Cas retour inverse du second : un freinage.

$$\underline{5^e \text{ cas}} : \text{pente } \overrightarrow{M_1 M_2} < - \left(1 + \frac{13}{96} \delta^2 + \text{ordre } \delta \varepsilon^2 \right)$$

Cas retour inverse du premier : deux freinages séparés par une commutation φ_s .

A titre de comparaison : lorsque les deux orbites données sont tangentes :

$$\left| \text{pente } \overrightarrow{M_1 M_2} \right| = \left(1 + \frac{\delta^2}{6} + \text{ordre } \delta \varepsilon^2 \right)$$

(au-dessus de cette valeur, les orbites sont intérieures, en-dessous, elles sont sécantes).

III,2.2. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES DONT L'UNE EST D'EXCENTRICITÉ PROCHE DE 1.

Nous donnerons les résultats sans démonstration.

En général, ces transferts sont optimaux "par l'infini", il peut toutefois ne pas en être ainsi si ϖ_2 ou si l'autre excentricité est proche du zéro.

Utilisons la réversibilité et les symétries pour supposer $e_1 \simeq 1$ et $0 \ll \varpi_2 \ll \pi$.

Si $e_2 \simeq 1$, nous prendrons pour première orbite celle d'apogée le plus élevé d'où alors :

$$e_1 \simeq 1 \quad A_1 \gg A_2 \quad 0 \leq \varpi \leq \pi.$$

Si e_2 n'est pas voisin de 1, de deux choses l'une :

ou bien $P_2 > 11,938 P_1$: le transfert optimal est "par l'infini"

ou bien $P_2 \leq 11,938 P_1$: $A_1 \gg A_2$.

En conséquence, dans les cas discutables, que nous allons étudier, on supposera toujours :

$$e_1 \simeq 1, \quad A_1 \gg A_2, \quad 0 \ll \varpi_2 \ll \pi.$$

L'application des résultats obtenus sur les angles utiles et les commutations, résultats exposés dans le chapitre III.2, conduit aux solutions suivantes :

Le transfert optimal, s'il n'est pas "par l'infini" comporte une ou deux impulsions dans la partie haute de l'orbite, impulsions qui conduisent à une orbite intermédiaire O_2 (fig. 53), puis une impulsion de freinage au voisinage du périégée (cette dernière étant en général la plus importante).

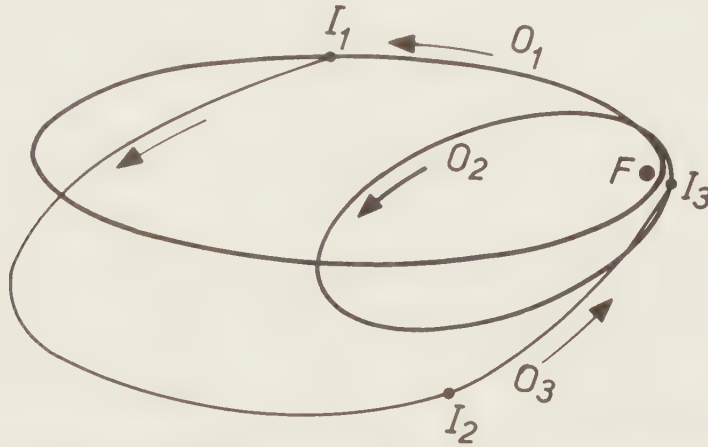


Fig. 53 - Exemple de transfert optimal à trois impulsions (orbites coplanaires).

(Example of a three-impulse optimal transfer (coplanar orbits))

Posons $\varepsilon = \sqrt{1 - e^2}$, les éléments de O_3 sont (avec une erreur relative de l'ordre de ε_1^2) :

1° - CAS OÙ LE TRANSFERT EST A TROIS IMPULSIONS :

$$\left. \begin{array}{l} a_3 \simeq a_1 \\ \varepsilon_3 \simeq \varepsilon_1 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \end{array} \right\} P_3 \simeq P_2$$

$$\varpi_3 = \varpi_2 - \varepsilon_3 \left(\frac{1 + \sqrt{2 + 2e_2}}{e_2} - 3 \right) + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

il faut que ε_3 et ϖ_3 vérifient : $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \geq 2(\varpi_2 + \varpi_3)$

$$\text{et : } \varpi_3 \gg |\varepsilon_3 - \varepsilon_1|$$

pour que l'on soit dans le cas des transferts à trois impulsions

(ce qui exige $a_2 > 0,7127$; $\varpi_2 \leq \varepsilon_1$; $\frac{9}{25} < \frac{P_1}{P_2} < \frac{25}{9}$).

Les trois impulsions sont alors :

$$a) \text{ en } E_1 = \frac{\pi}{2} + \text{ordre } \varepsilon_1^2 : \varphi \simeq \varepsilon_1 + \varpi_3 - \frac{\varepsilon_3}{2} ; \Delta V \simeq \frac{n_1 a_1}{2} \left(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varpi_3 \right)$$

$$b) \text{ en } E = -\frac{\pi}{2} + \text{ordre } \varepsilon_1^2 : \varphi \simeq \pi - \frac{3}{2} \varepsilon_3 ; \Delta V \simeq \frac{n_1 a_1}{2} \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varpi_3 \right)$$

$$c) \text{ en } v_3 = -4 \varepsilon_3 + \text{ordre } \varepsilon_1^3 : \varphi \simeq \pi - \varepsilon_3 ; \Delta V \simeq \frac{H_3 - H_2}{P_2} .$$

La première commutation est une commutation φ_i' la seconde une commutation φ_s .

2° - CAS OÙ LE TRANSFERT EST A DEUX IMPULSIONS :

$$\left. \begin{array}{l} a_3 \simeq a_1 \\ \varepsilon_3 \simeq \varepsilon_1 \sqrt{\frac{P_2}{P_1}} \end{array} \right\} \Rightarrow P_3 \simeq P_2$$

$$\varpi_3 = \frac{\sin \varpi_2}{1 + \frac{\varepsilon_3}{|\varepsilon_3 - \varepsilon_1|} \left(\frac{1 + \sqrt{2 + 2e_2}}{e_2} - 3 \right)} + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

il faut que ε_3 et ϖ_3 vérifient : $\varpi_3 \leq |\varepsilon_3 - \varepsilon_1|$

$$\text{et : } \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2 \left| \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \right| \geq \frac{4 \varpi_3}{\left| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right|} \cdot \tan \frac{\varpi_2}{2}$$

pour que l'on soit dans le cas des transferts à deux impulsions.

Les deux impulsions sont alors :

$$a) \text{ en } E_1 \simeq 2 \text{ Arc cot } \frac{\varpi_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} : \Delta V \sim \frac{n_1 a_1}{2} \left| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right| \left(1 + \frac{\varpi_3^2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \right)$$

$$\text{et : si } \varepsilon_3 > \varepsilon_1 : \varphi = \frac{\varepsilon_3}{2} \cdot \frac{\varpi_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

$$\text{si } \varepsilon_3 < \varepsilon_1 : \varphi = \pi - \frac{3 \varepsilon_3 \varpi_3}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

$$b) \text{ en } v_3 = -\frac{4 \varepsilon_3 \varpi_3}{\left| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right|} + \text{ordre } \varepsilon_1^3 : \Delta V = \frac{H_3 - H_2}{P_2} (1 + \text{ordre } \varepsilon_1^2)$$

$$\varphi = \pi - \frac{\varepsilon_3 \varpi_3}{\left| \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \right|} + \text{ordre } \varepsilon_1^3$$

La commutation est de type φ_i si $\varepsilon_3 > \varepsilon_1$ et de type φ_s si $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$.

Remarque : le cas limite $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (donc $\varpi_3 = 0$, correspond à des transferts mono-impulsionnels (les orbites 0_1 et 0_3 sont confondues), dans ce cas

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - \text{ordre } \varepsilon_1^2 \ll 1.$$

Si le transfert donné ne satisfait ni aux conditions des transferts à trois impulsions ni à celles des transferts à deux impulsions, il est "par l'infini" ce qui en particulier est le cas si :

$$e_2 (1 - \cos \varpi_2) > (1 - e_1) \frac{9}{8} (\sqrt{2} + 1).$$

(Cette condition suffisante d'optimalité du "transfert par l'infini" est valable même si e_1 n'est pas voisin de 1; pour $e_1 \simeq 1$ elle indique que si le transfert est "fini" on doit avoir e_2 ou $\varpi_2 \simeq 0$).

Les figures 54, 55, 56, 57 et 58 indiquent les résultats de la discussion du mode optimal de transfert en fonction de ε_1 ($= \sqrt{1 - e_1^2}$), ϖ_2 , P_1 et P_2 pour différentes valeurs de e_2 ; on porte en abscisse $x = \sqrt{P_2 / P_1}$ et en ordonnée $y = 2/\varepsilon_1 \sin \varpi_2 / 2$ (voisin de ϖ_2 / ε_1 si ϖ_2 est petit).

Les courbes limites sont des segments (autour des zones de transferts "à trois impulsions") ou des arcs de conique (entre les zones de transferts "à deux impulsions" et celles de transferts "par l'infini").

Posons
$$g(e_2) = \frac{1 + \sqrt{2 + 2e_2}}{e_2} - 3 \geq 0.$$

La conique DAD' a pour équation : $2y^2 = (3x - 1) [1 + x(g - 1)]$

L'ellipse EBE' a pour équation : $2y^2 = (3 - x) [x(g + 1) - 1]$

On peut distinguer plusieurs cas :

1.
$$0,7127 \dots \left(= \frac{5 + \sqrt{41}}{16} \right) < e_2 < 1.$$

Dans ce cas : $0 < g < 1$; les deux coniques DAD' et EBE' sont des ellipses dont $0x$ est l'un des axes (c'est le grand axe de EBE').

Il y a deux zones triangulaires symétriques CDE et $C'D'E'$ de transferts "à trois impulsions"; la bitangente DE a pour équation $4y = 1 + x(2g + 1)$ les coordonnées de CDE sont :

$$C(1; g), D\left(\frac{3}{5 - 2g}; \frac{g + 2}{5 - 2g}\right), E\left(\frac{5}{3 + 2g}; \frac{2 + 3g}{3 + 2g}\right)$$

2. $e_2 = 0,7127 \dots$; $g = 1$

DAD' est une parabole, EBE' est un cercle bi-tangent à DAD' en D et D'

Les trois points CDE sont confondus et la zone de transferts "à trois impulsions" a disparu.

3. $e_2 < 0,7127 \dots$; $g > 1$

DAD' est un arc d'hyperbole et EBE' un arc d'ellipse de petit axe $0x$.

REMARQUE I :

Les cas de transferts mono-impulsionnels, dont on a parlé ci-dessus ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3$) correspondent à :

$$|y| \leq \min(g; \sqrt{g}) ; x = 1 - \frac{\sin^2 \frac{\varpi_2}{2}}{g^2(1 + e_2)} \left[e_2 g(g + 8) - 8 + 8e_2 \right] + \text{ordre } \varepsilon_1^2 \varpi_2^2$$

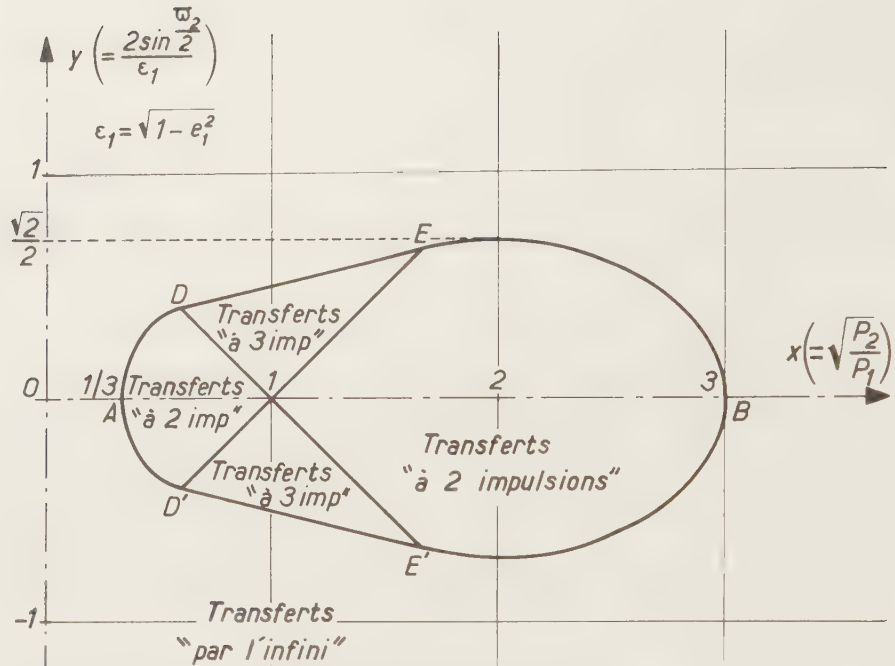


Fig. 54 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites telles que : $e_1 \sim 1$, $e_2 \sim 1$, $A_1 \geq A_2$

(Remarque : si $\frac{A_2}{A_1} = 1$ (ordre $\epsilon_1 \varpi_2$) et si le transfert est fini la dernière impulsion disparaît).

(Determination of the optimal transfer type in the case $e_1 \sim 1$; $e_2 \sim 1$; $A_1 \geq A_2$)

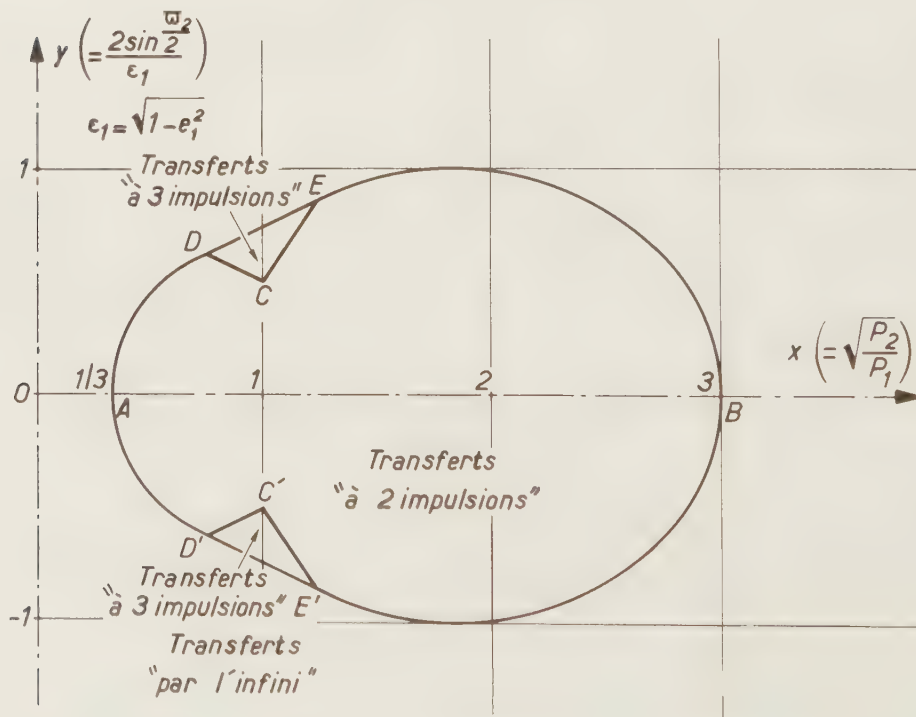


Fig. 55 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites telles que $e_1 \sim 1$; $0,7127 \dots < e_2 < 1$. (Cas de figure : $e_2 = 0,835$; $g(e_2) = 1/2$).

(Determination of the optimal transfer type in the case $e_1 \sim 1$; $e_2 = 0,835$ ($g(e_2) = 1/2$))

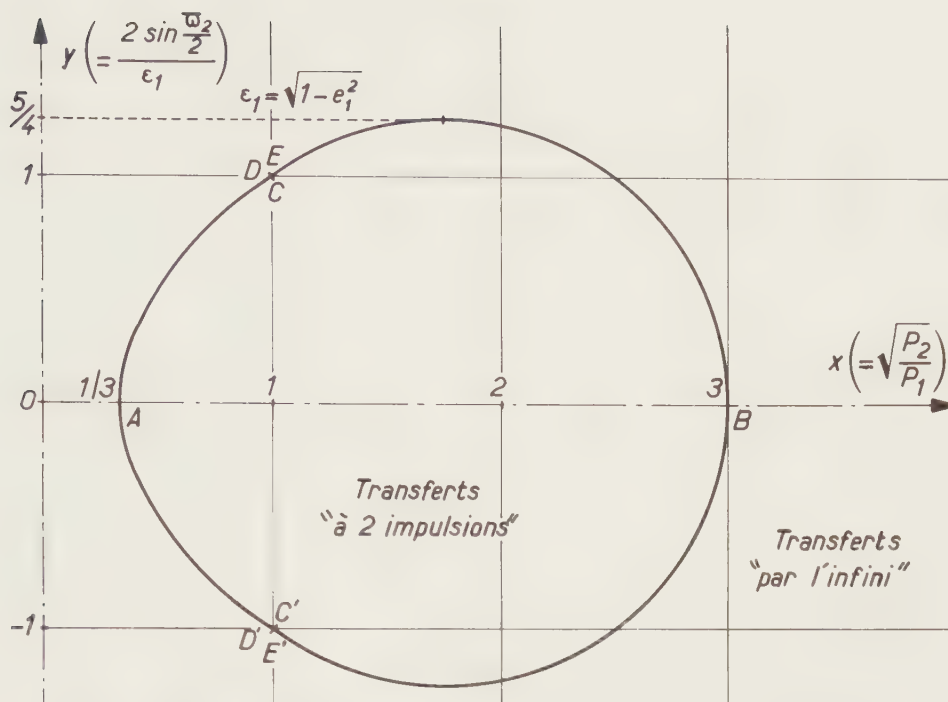


Fig. 56 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites telles que

$$e_1 \sim 1; e_2 = 0,7127... = \frac{5 + \sqrt{41}}{16} \quad (g(e_2) = 1)$$

(Determination of the optimal transfer type in the case $e_1 \sim 1; e_2 = 0,7127$ ($g(e_2) = 1$))

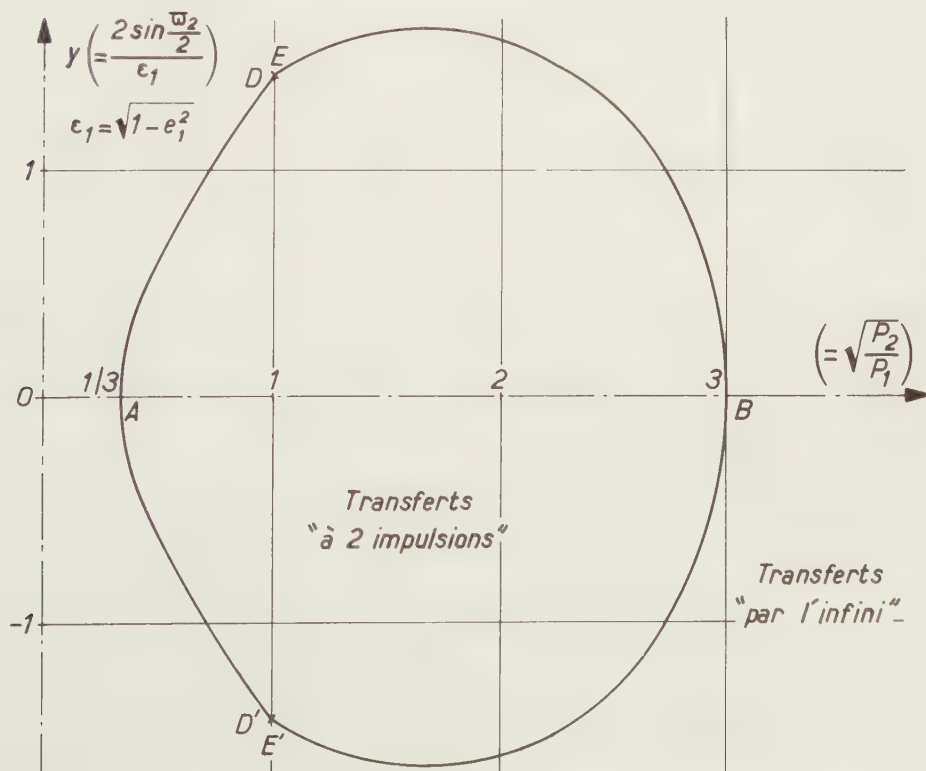


Fig. 57 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites telles que :

$$e_1 \sim 1; 0 < e_2 < 0,7127 \dots \text{ (Cas de figure : } e_2 = 0,552 \dots; g(e_2) = 2)$$

(Determination of the optimal transfer type in the case $e_1 \sim 1; e_2 = 0,552$ ($g(e_2) = 2$))

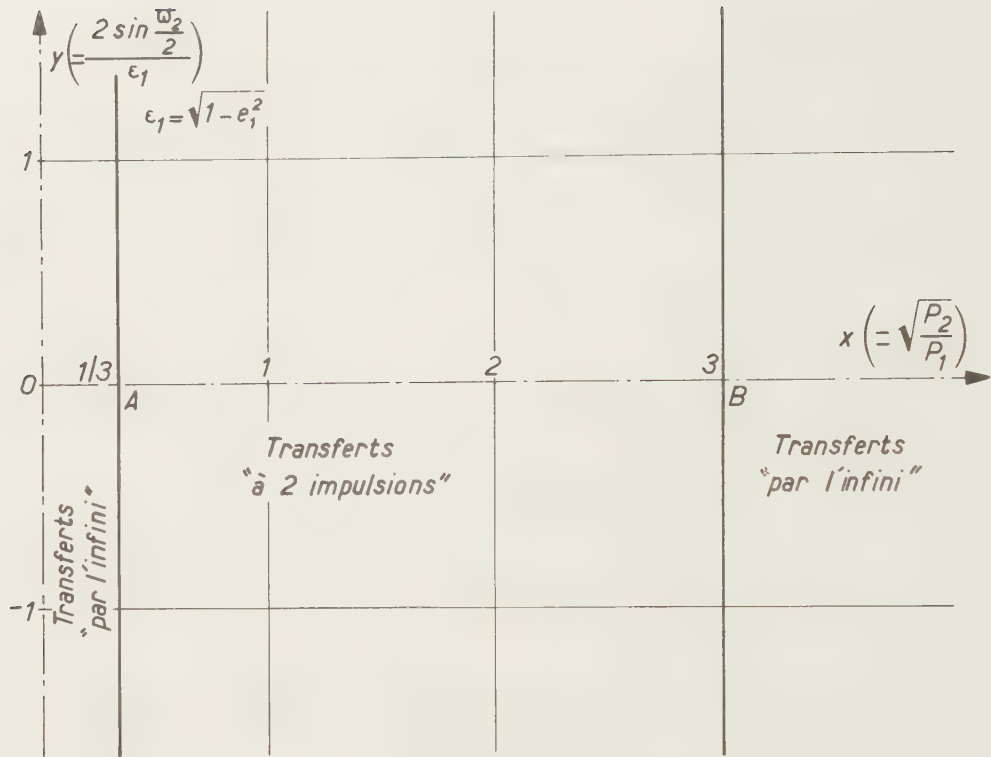


Fig. 58 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites telles que $e_1 \sim 1$; $e_2 = 0$.
(Determination of the optimal transfer type in the case $e_1 \sim 1$; $e_2 = 0$).

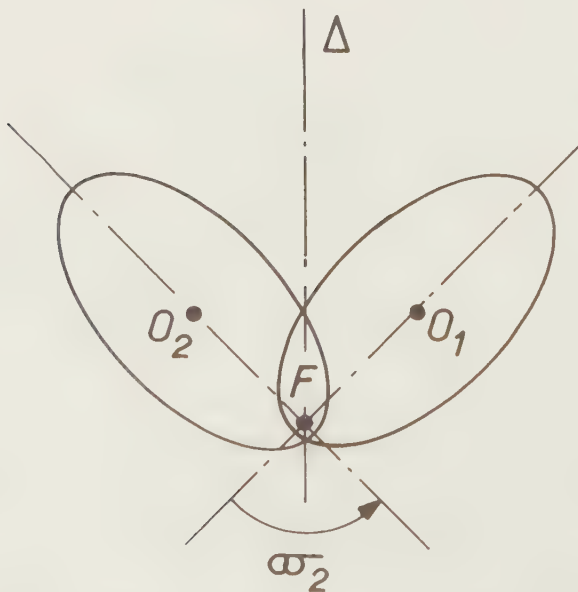


Fig. 59 - Orbites coplanaires égales.
(Equal coplanar orbits)

la largeur de la zone de transferts mono-impulsionnels correspondants n'est que de l'ordre de : $\epsilon_1^2 \omega_2^2 (\sim \epsilon_1^4 \gamma^2)$.

REMARQUE II :

La précision des figures 54 à 58 est de l'ordre de ϵ_1^2 .

III,2.3. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES ÉGALES.

$$a_2 = a_1$$

$$e_2 = e_1$$

ω_2 est quelconque.

La figure formée par les deux orbites admet un axe de symétrie Δ d'angle polaire $\omega_2/2$ (fig. 59).

L'orbite actuelle, au cours du transfert optimal, a pour centre initial O_1 et pour centre final O_2 , son centre O traverse donc l'axe Δ à un certain moment t ; soit C' la vitesse caractéristique du transfert entre les instants zéro et t et C'' celle entre t et t final ($C + C'' = C_2$).

Supposons par exemple $C' \leq C''$, si alors on effectue une symétrie spatiale par rapport à Δ et temporelle par rapport à t (ou à $t + \delta t$ avec $\delta t \geq 0$) de la première partie du transfert on obtient un second transfert, symétrique, de vitesse caractéristique $2C' \leq C' + C''$ donc optimal, d'où :

1°) Il y a un ou des transferts symétriques parmi les transferts optimaux entre orbites coplanaires égales.

2°) Les éventuels transferts optimaux dissymétriques peuvent être obtenus par composition de transferts symétriques, à condition que ceux-ci aient la même orbite médiane (nous verrons que ce cas ne se présente pas).

Cherchons donc les transferts optimaux symétriques par rapport à Δ .

De tels transferts ne peuvent être "à trois impulsions" car la seconde impulsion qui ferait passer d'une ellipse à sa symétrique par rapport à Δ serait obligatoirement radiale donc hors de l'angle utile local (le moment cinétique des deux ellipses, qui sont égales, est le même donc l'impulsion intermédiaire ne peut avoir de composante horizontale).

Pour la même raison ces transferts ne peuvent être "à une impulsion".

Les transferts optimaux cherchés sont donc soit "par l'infini" (cas effectivement symétriques par rapport à Δ) soit "à deux impulsions".

Examinons ce dernier cas (fig. 60). L'orbite O intermédiaire est symétrique par rapport à Δ ;

les points d'impulsions K et L , sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Δ , comme d'autre part ils se correspondent dans la commutation dont O est l'orbite intermédiaire, cela suffit à les déterminer :

Soit e l'excentricité de l'orbite intermédiaire O .

Les points K et L se correspondent dans une commutation de type φ_i (ou φ'_i si $e \geq e_0 = 0,9250 \dots$), cette commutation est symétrique et connue [3], on obtient :

$\cos v_K = \cos v_L =$ racine de :

$$e^2 x^3 + 3 e x^2 + (3 + e^2) x + 2 e = 0$$

$\cos E_K = \cos E_L =$ racine de :

$$e^2 y^3 - e(3 - e^2) y^2 + y(3 - 2 e^2) = e - e^3$$

$$\varphi_L = \pi - \varphi_K = \pi - \varphi_{i_K} \text{ (ou } \pi - \varphi'_{i_K} \text{ si } e \geq e_0)$$

$$\text{avec : } \operatorname{tg} \varphi_K = \operatorname{tg} \varphi_{i_K} \text{ (ou } \operatorname{tg} \varphi'_{i_K} \text{)} =$$

$$= \frac{e \sin v_K}{3 + 2 e \cos v_K} = \frac{\cos E_K}{\sin v_K}$$

Fig. 60 - Transfert "à deux impulsions symétriques"

(Symmetrical two impulses transfer)

(v_K, v_L, E_K, E_L sont relatifs à l'orbite O intermédiaire).

La commutation étant de type φ_i (ou φ'_i) l'impulsion en K est une poussée accélératrice et celle en L est un freinage (symétrique et donc de même coût).

Il est donc aisé de construire des exemples de transferts optimaux à partir de l'ellipse intermédiaire, le problème direct étant bien plus difficile.

Bien entendu, il faut comparer les deux modes de transferts et choisir le meilleur, ce qui exige d'abord la recherche du transfert optimal "à deux impulsions symétriques" grâce aux équations ci-dessus (il y a toujours une solution et une seule).

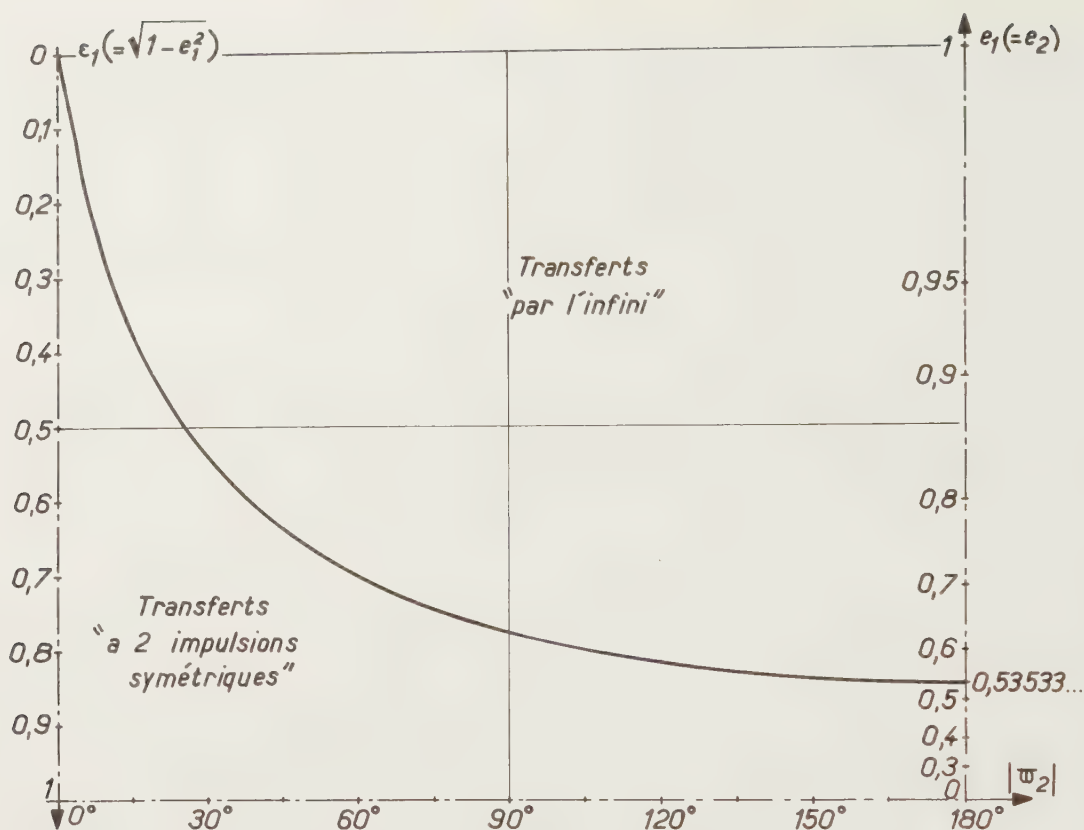


Fig. 61 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites égales.

(Determination of the optimal transfer type between equal orbits)

La comparaison ne dépend que de $e_1 (= e_2)$ et de $|\varpi_2|$ (et non de $a_1 (= a_2)$), les résultats sont indiqués sur la figure 61, on peut y lire :

Si : $e_1 \leq 0,53533 \dots$ (= racine de $16x^3 + 8x^2 = 7x + 1$)
le transfert optimal est "à deux impulsions symétriques".

Si : $e_1 > 0,53533$: il y a un angle $|\varpi_2|$ limite (fonction décroissante de e_1) au-delà duquel le transfert optimal est "par l'infini"

$$e_1 \approx 1 : |\varpi_2| \text{ limite} \sim \frac{1}{2} \sqrt{1 - e_1^2} \quad R_d = \frac{\varepsilon_1}{2} R_d$$

$e_1 = 0,6505$: $|\varpi_2|$ limite = $80^\circ,73$ (ce cas correspond à une excentricité $e = 1/2$ pour l'orbite intermédiaire dans le transfert "à deux impulsions symétriques").

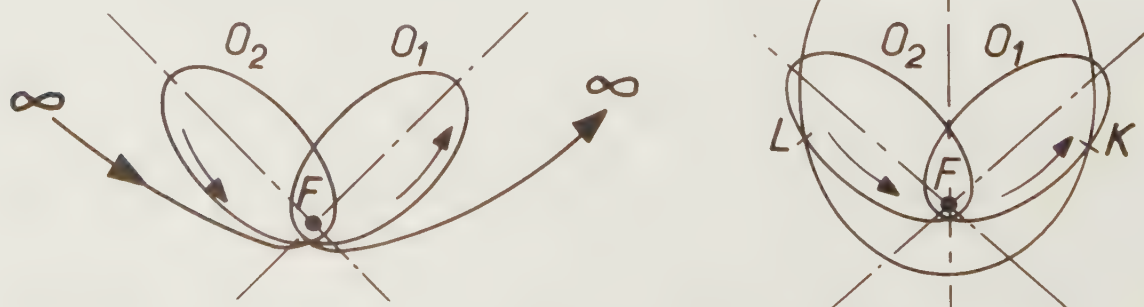


Fig. 62 - Les deux modes de transferts optimaux entre orbites coplanaires égales.

(The two optimal transfer types between equal coplanar orbits)

La courbe limite est d'équation compliquée, mais elle est, sur la figure 61 (coordonnées $|\varpi_2|$ et $\varepsilon_1 = \sqrt{1 - e_1^2}$), toujours à moins de 0,003 en-dessous de la parabole cubique de même point et tangente d'inflexion (en $|\varpi_2| = 0, \varepsilon_1 = 0$) et de même tangente (parallèle à l'axe de $|\varpi_2|$) au point ($|\varpi_2| = 180^\circ, \varepsilon_1 = 0,53533 \dots$).

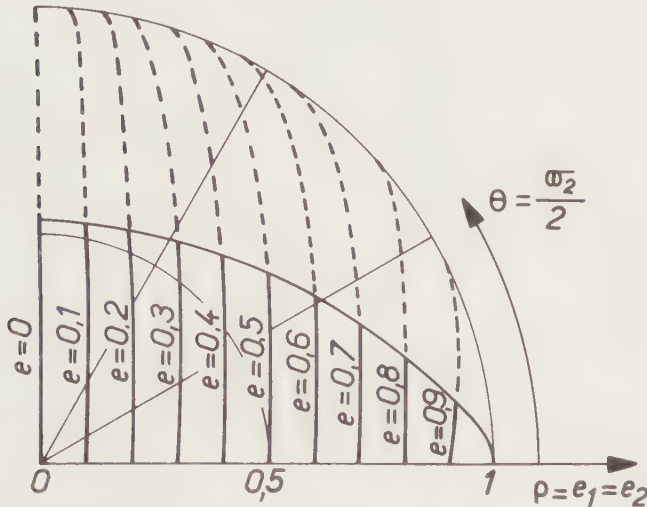


Fig. 63

médiaire se déduit alors de considérations d'échelle.

REMARQUE : pour $\frac{\varpi_2}{2} = \theta = 0$ on obtient bien $e = e_1$.

III,2.4. TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES ET COAXIALES INVERSES ($\varpi_2 = 180^\circ$).

Ces transferts sont de trois types :

- soit "par l'infini",
- soit par une ellipse bitangente en les apogées,
- soit par une ellipse bitangente en les périées (fig. 64).

Ces résultats sont aisés à démontrer si les deux orbites données sont sécantes.

Dans ce cas, le transfert "par les périées" qui utilise successivement un freinage puis une poussée accélératrice ne peut être optimal (sens des commutations, [3]), il faut donc prouver que le transfert optimal est alors soit "par les apogées" soit "par l'infini".

I - Le transfert optimal ne peut être "à trois impulsions", en effet, les conditions nécessaires pour l'optimalité de ces transferts :

$$e_1 + e_2 > 1,712 ; 0^\circ < |\varpi_2| < 22^\circ \text{ réf. [3]}$$

sont très éloignées du cas étudié ($\varpi_2 = 180^\circ$).

II - Le transfert optimal ne peut non plus être "à une impulsion", en effet, aux deux points d'intersection des deux orbites, la vitesse est ascendante sur l'une des orbites et descendante

La figure 63 indique la valeur de e excentricité de l'orbite intermédiaire (dans le cas des transferts "à deux impulsions symétriques") en fonction des coordonnées polaires $\rho = e_1 = e_2, \theta = \varpi_2 / 2$ les courbes $e = C^{te}$ sont des paraboles tangentes au cercle $e_1 = 1$ (leur partie pointillée correspond à la zone où les transferts "par l'infini" sont meilleurs que les transferts "à deux impulsions symétriques").

Cette figure aide donc à résoudre le problème de la recherche de l'ellipse intermédiaire à partir des deux orbites initiale et finale données; connaissant e il est aisé de construire un exemple de transfert optimal "à deux impulsions symétriques" conduisant d'une orbite ($e_1, \varpi_1 = 0$) à une orbite (e_2, ϖ_2), la taille de l'orbite inter-

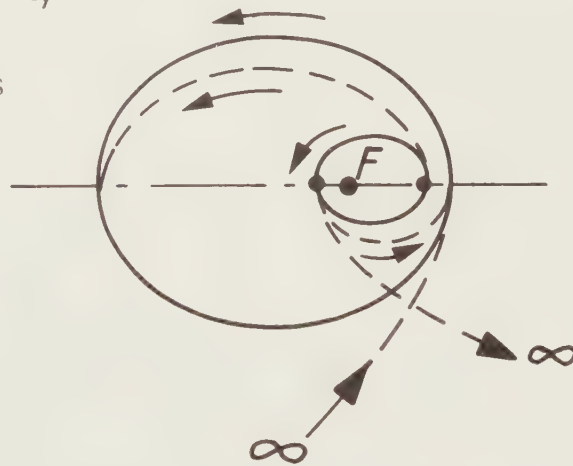


Fig. 64 - Les trois types de transferts optimaux entre orbites coplanaires et coaxiales inverses.

(The three optimal transfer types between coplanar and inverse (or opposing) co-axial orbits)

sur l'autre (fig. 65), l'impulsion nécessaire est donc hors des angles aigus de l'horizontale et des tangentes locales donc, a fortiori, hors des "angles utiles" locaux.

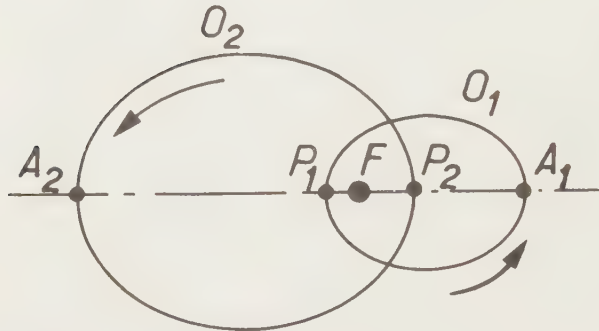


Fig. 65 - Cas des orbites sécantes.
(Case of intersecting orbits)

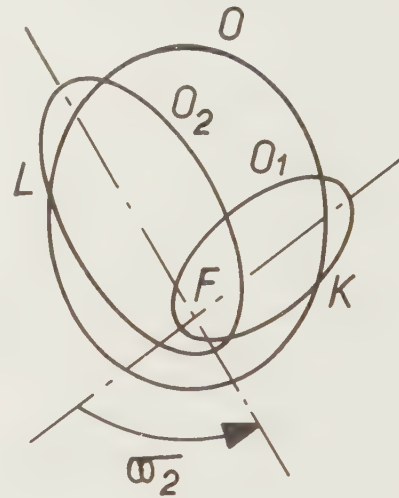


Fig. 66 - Etude d'une commutation φ_i ou φ'_i .
(Study of a φ_i or φ'_i commutation)

III - Le transfert optimal est donc soit "par l'infini", soit "à deux impulsions", examinons cette dernière possibilité, le transfert est alors composé d'une impulsion accélératrice suivie d'un freinage, après une commutation intermédiaire φ_i ou φ'_i (c'est évident si $P_1 < P_2 < A_2 < A_1$ ou bien si $P_2 < P_1 < A_1 < A_2$ car une poussée accélératrice ne fait décroître ni P ni A (et il en est donc de même de deux successives) et c'est l'inverse pour un freinage; c'est assez aisé à démontrer si $P_1 < P_2 \leq A_1 \leq A_2$ ou bien si $P_2 \leq P_1 \leq A_2 \leq A_1$).

Examinons donc (fig. 66) un transfert optimal à deux impulsions en K et L , la première étant une poussée accélératrice, la seconde un freinage et la commutation intermédiaire étant de type φ_i ou φ'_i , l'angle ω_2 des axes des orbites O_1 et O_2 est en valeur absolue inférieur ou égal à l'angle saillant $\angle FRK$; on ne peut donc avoir $\omega_2 = 180^\circ$ que si les points K et L , qui se correspondent dans une commutation φ_i (ou φ'_i) sont diamétralement opposés, ce qui n'est le cas que si : soit K et L sont l'un le périhélie et l'autre l'apogée de l'orbite intermédiaire O , soit cette orbite O est un cercle (cas particulier limite du précédent); dans ces deux cas, les impulsions en K et L sont tangentes à l'orbite O et le transfert ainsi construit est bien "par une ellipse bitangente en les apogées".

Si donc les deux orbites coplanaires et coaxiales inverses données sont sécantes, le transfert optimal est toujours soit "par les apogées" soit "par l'infini".

Dans le cas où les deux orbites données ne sont pas sécantes, la démonstration est beaucoup plus délicate, l'utilisation des résultats obtenus sur les commutations et les "angles utiles" conduit non à deux solutions bi-impulsionnelles mais à quatre :

- 1°) "par les périhélie",
- 2°) "par les apogées",
- 3°) deux solutions nouvelles symétriques l'une de l'autre;
- 4°)

la comparaison directe de ces quatre solutions conduit toujours à éliminer les deux dernières (qui sont parfois d'un coût très voisin de celui de la meilleure des deux autres).

La comparaison des trois modes de transfert entre orbites coplanaires et coaxiales inverses conduit aux résultats suivants :

III,2.4.1. CAS OÙ LES DEUX ORBITES DONNÉES SONT SÉCANTES.

Nous savons déjà que dans ce cas, le transfert "par les périgées" n'est pas optimal, il reste donc les deux solutions dessinées figure 67 : transfert "par les apogées" et transfert "par l'infini".

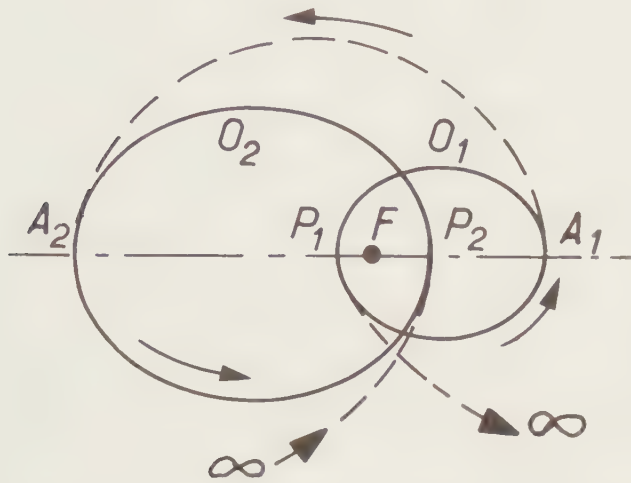


Fig. 67 - Les deux modes de transferts optimaux entre orbites coplanaires, coaxiales inverses et sécantes.

(The two optimal transfer types between intersecting coplanar and inverse coaxial orbits)

La vitesse caractéristique du transfert "par les apogées" est ici :

$$C_A = \sqrt{2\mu} \left[\sqrt{\frac{A_1 + A_2}{A_1 + A_2}} - \sqrt{\frac{P_1}{A_1(A_1 + P_1)}} - \sqrt{\frac{P_2}{A_2(A_2 + P_2)}} \right]$$

et celle du transfert "par l'infini" est (comme toujours) :

$$C_\infty = \sqrt{\frac{2\mu}{P_1}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}}$$

La comparaison de C_∞ et C_A se fait facilement si l'on utilise :

$$\text{sgn}(C_\infty - C_A) = \text{sgn} \left[Z_2 \sqrt{A_1} + Z_1 \sqrt{A_2} - \sqrt{A_1 + A_2} \right]$$

avec

$$Z(e) = \frac{\sqrt{1+e} - e\sqrt{2}}{\sqrt{1-e}}$$

On en déduit la figure 68 tracée en fonction des coordonnées e_2 et e_1 (en supposant $P_1 \leq P_2$ ce que l'on peut toujours faire les transferts étant réversibles); il n'y a plus sur cette figure qu'une faible proportion de cas indécis où la comparaison dépend du rapport des grands axes et où le calcul est nécessaire.

Les courbes de la figure 68 ont pour équation :

courbe BC : $Z_1^2 + Z_2^2 = 1$

courbe CE : $Z_1 + Z_2 = \sqrt{2}$

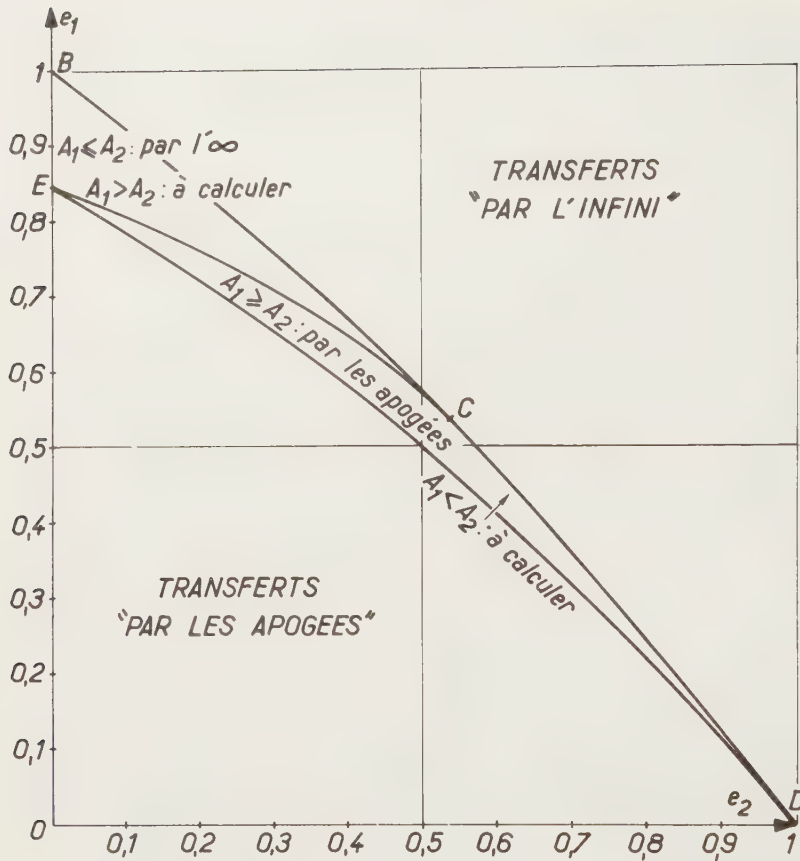


Fig. 68 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires sécantes en positions inverses ($P_1 \leq P_2 < A_1 \leq A_2$).

(Determination of the optimal transfer type between intersecting coplanar and inverse co-axial orbits ; $P_1 \leq P_2 < A_1 \leq A_2$)

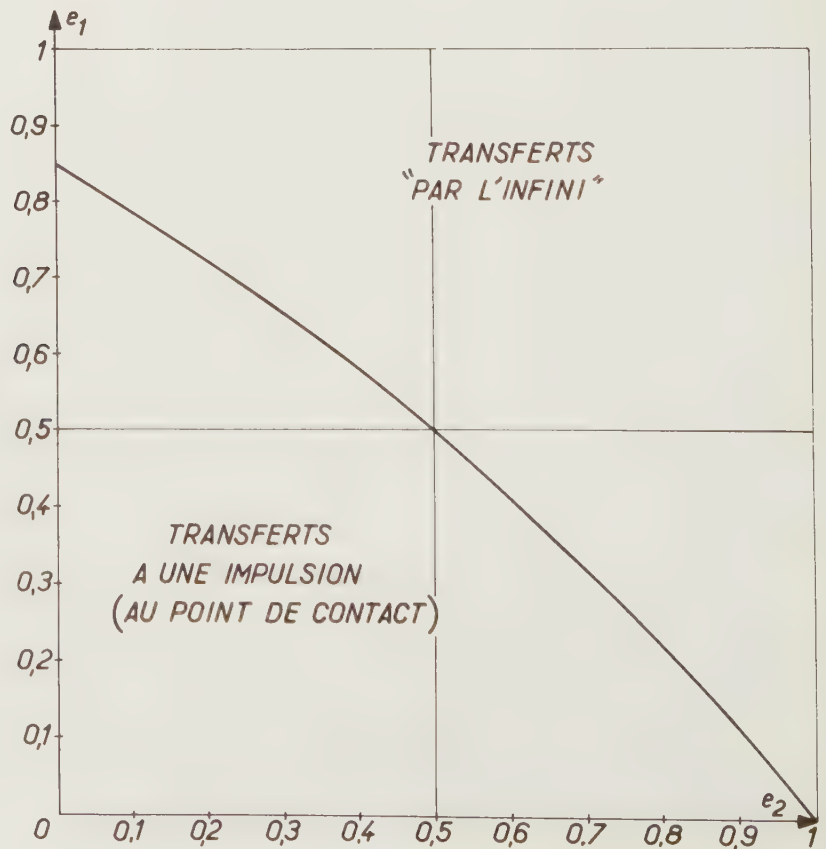


Fig. 69 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires tangentes en positions inverses ($P_1 \leq A_1 = P_2 \leq A_2$).

(Determination of the optimal transfer type between tangent coplanar and inverse co-axial orbits; $P_1 \leq A_1 = P_2 \leq A_2$)

la courbe CE correspond au cas : $C_\infty = C_A$ pour $A_1 = A_2$

courbe CD :
$$\sqrt{2(1+e_1)(1+e_2)} = \sqrt{1-e_1e_2} + e_1\sqrt{1+e_2} + e_2\sqrt{1+e_1}$$

elle correspond au cas : $C_\infty = C_A$ pour $P_1 = P_2$

Les trois courbes BC , CD , CE sont tangentes (pente -1) en C ($e_1 = e_2 = 0,53533 \dots =$ racine de $16x^3 + 8x^2 = 7x + 1$).

courbe :
$$Z(e_1) = \sqrt{2+2e_2} - 1$$

elle correspond au cas : $C_\infty = C_A$ pour $P_2 = A_1$

elle est tangente (pente $-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$) en D à CD et elle passe par le point $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$

REMARQUE I :

D'un point de vue pratique, les expressions :

$$e_1 + e_2 > 1,07067 \Rightarrow \text{transfert "par l'infini"}$$

$e_1 + e_2 < 0,845 + 0,31 \min [e_1 ; e_2] \Rightarrow \text{transfert "par les apogées"}$
suffisent le plus souvent.

REMARQUE II :

Si e_1 et e_2 sont faibles le transfert "par les périées" peut présenter un intérêt pratique car il est d'un coût à peine supérieur au transfert "par les apogées" (écart relatif compris entre 0 et $\frac{e_1 + e_2}{4}$)

III,2.4.2. CAS OU LES ORBITES DONNÉES SONT TANGENTES.

Les deux transferts "par les périées" et "par les apogées" dégènèrent en un seul à une impulsion au point de contact.

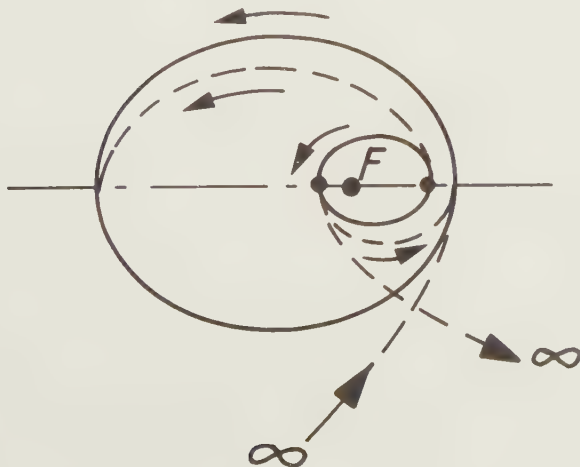
Si nous supposons $P_1 \leq P_2$ ($= A_1 \leq A_2$), le coût de ce transfert est :

$$C_A = C_P = \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}}.$$

Il est aisé de le comparer avec le transfert "par l'infini", les résultats sont indiqués sur la figure 69 en fonction de e_1 et e_2 (avec $P_1 \leq P_2$), la courbe limite est la courbe DE de la figure 68.

III,2.4.3. CAS OU LES ORBITES DONNÉES SONT INTÉRIEURES.

Nous supposerons encore, en utilisant au besoin la réversibilité, que $P_1 < P_2$ (donc $P_1 \leq A_1 < P_2 \leq A_2$).



Les trois types de transferts (fig. 70) peuvent alors être optimaux.

Fig. 70 - Les trois types de transferts optimaux entre orbites coplanaires, coaxiales inverses et intérieures.

(The three optimal transfer types between coplanar, inverse co-axial and non-intersecting orbits)

Leur vitesse caractéristique sont respectivement :

1°) Transfert "par les périgées"

$$C_P = \frac{(P_2 - P_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{P_2 P_1 (P_2 + P_1)}} + \sqrt{\frac{\mu A_2}{P_2 a_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{P_1 a_1}}$$

2°) Transfert "par les apogées"

$$C_A = \frac{(A_2 - A_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{A_2 A_1 (A_2 + A_1)}} + \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}}$$

3°) Transfert "par l'infini"

$$C_\infty = \sqrt{\frac{2\mu}{P_1}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{P_1 a_1}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_2}{P_2 a_2}}$$

La comparaison de C_P et C_∞ ne dépend pas de A_1 , elle est donc simple, posons $\frac{P_1}{P_2} = y$ ($y \ll 1$) on obtient :

$$\operatorname{sgn}(C_\infty - C_P) = \operatorname{sgn} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1-y}{\sqrt{y(y+1)}} - \sqrt{2+2e_2} \right]$$

La comparaison de C_P , C_A et C_∞ conduit aux résultats indiqués sur la figure 71; les quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ découpent le carré (0; 1) en cinq régions : I à V; si l'on porte successivement en ordonnée :

$$1^\circ) \quad y_\alpha = \frac{P_1}{A_1}$$

$$2^\circ) \quad y_\beta = \frac{P_1}{P_2}$$

les deux points $\alpha(e_2, y_\alpha)$ et $\beta(e_2, y_\beta)$ sont sur la même verticale, α étant le plus haut.

On obtient alors :

β en zone I ou II : transfert optimal "par les apogées"

β en zone III $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ en zone I : transfert optimal "par les apogées"} \\ \alpha \text{ en zone II : cas douteux : par les apogées ou les périgées} \\ \alpha \text{ en zone III : transfert optimal "par les périgées"} \end{array} \right.$

β en zone IV $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ en zone I : cas douteux : par les apogées ou l'infini} \\ \alpha \text{ en zone II, III ou IV : transfert optimal "par l'infini"} \end{array} \right.$

β en zone V : transfert optimal "par l'infini".

Il n'y a plus que deux cas douteux où le calcul de comparaison est nécessaire.

Si β est sur $\mathcal{C}_3$: $C_\infty = C_P$, si α est en plus sur $\mathcal{C}_1$: $C_\infty = C_P = C_A$ (l'équation de $\mathcal{C}_3$ est donc :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1-y}{\sqrt{y(y+1)}} = \sqrt{2+2e_2}, \quad \mathcal{C}_3 \text{ passe par le point } (e_2 = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3})$$

c'est une transformée de la courbe de la figure 69 (avec $y = \frac{1-e_1}{1+e_1}$; la courbe $\mathcal{C}_1$ a pour pente -1,821 en (0; 1) et passe par (1/2; 0,4166) et par (0,3751; 0,5488)).

La courbe $\mathcal{C}_2$ a pour équation $e_2^2 + e_1^2 - e_2 e_1 + 3e_1 - 3e_2 = 0$ avec $y = \frac{1-e_1}{1+e_1} (\equiv y_\alpha)$.

La courbe $\mathcal{C}_4$ est une transformée de la courbe limite de la figure 9 : β sur $\mathcal{C}_4$ et $y_\alpha = 1 \rightarrow C_\infty = C_A$.

Le tracé de courbes pointillées telles que DE et EF permet dans certains cas de lever le doute lorsque β est en zone IV et α en zone I.

Ainsi :

β sur EF et α sur $DE \implies C_\infty = C_A$

β au-dessus de EF et α au-dessus de $DE \implies C_\infty > C_A$

β en-dessous de EF et α en-dessous de $DE \implies C_\infty < C_A$

Un réseau suffisamment dense de courbes analogues permet de lever le doute dans tous les cas.

Sur la figure 71, la courbe DE correspond à $y_\alpha = 0,75$ la courbe EF passe par les points $(1/2; 0,2405)$ et $(3/4; 0,4210)$.

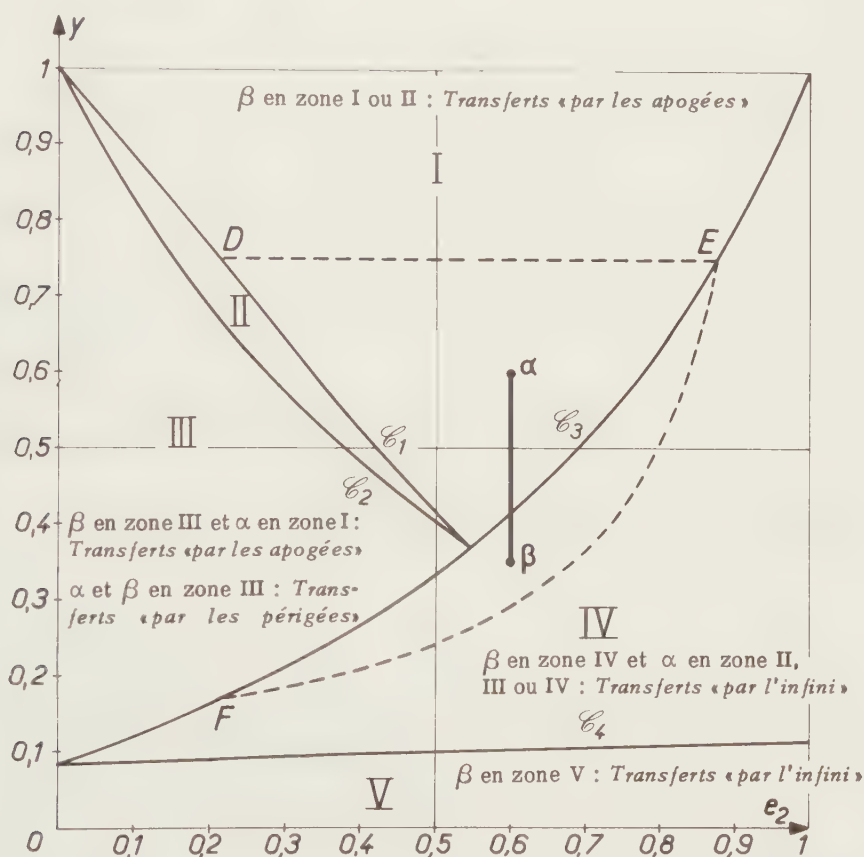


Fig. 71 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires, intérieures et coaxiales inverses.

(Determination of the optimal transfer type between coplanar, inverse co-axial and non intersecting orbits)

$$y = 1^0) \frac{P_1}{A_1} (= \gamma_\alpha), \quad 2^0) \frac{P_1}{P_2} (= \gamma_\beta); \quad \gamma_\beta < \gamma_\alpha; \quad P_1 \leq A_1 < P_2 \leq A_2$$

REMARQUES PRATIQUES :

Si $e_1 + e_2 > 1,0224$: le transfert optimal est "par l'infini"

Si $\frac{A_2}{P_1} < 8,7967$: le transfert optimal n'est pas "par l'infini"

Si $e_1 > \frac{3e_2}{3+e_2}$: le transfert optimal n'est pas "par les apogées"

Si $e_2 > \frac{e_1}{1+e_1} 1,726$: le transfert optimal n'est pas "par les périées".

Ces relations suffisent dans la plupart des cas.

Lorsque les deux orbites coaxiales inverses, coplanaires et intérieures données sont proches (c'est-à-dire lorsque $\frac{A_2}{P_1} \simeq 1$) l'optimum est très "plat" et une grande variété de solutions donne une perte relative très faible par rapport au cas optimum, ainsi si l'on pose :

$$\frac{A_1}{P_1} = 1 + \alpha \quad \frac{P_2}{P_1} = 1 + \beta \quad \frac{A_2}{P_1} = 1 + \gamma$$

$$(0 \leq \alpha < \beta \leq \gamma ; \gamma \text{ est petit})$$

on obtient :

1°) Coût du transfert de HOHMANN correspondant (c'est-à-dire entre orbites coaxiales directes : en prenant $\varpi_2 = 0^\circ$ au lieu de $\varpi_2 = 180^\circ$) :

$$C_H = \sqrt{\frac{\mu}{P_1}} \left[\frac{\gamma + \beta - \alpha}{4} + \frac{5(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) - 2\beta\gamma}{32} + \frac{13(\gamma^3 + \beta^3 - \alpha^3) + 11\gamma\beta^2 - \beta\gamma^2}{128} + \text{ordre } \gamma^4 \right]$$

$$2^\circ) \quad C_P = C_H + \sqrt{\frac{\mu}{P_1}} \left[\frac{3}{32} \beta \gamma (\gamma - \beta) \right] [1 + \text{ordre } \gamma]$$

$$3^\circ) \quad C_A = C_H + \sqrt{\frac{\mu}{P_1}} \left[\frac{3}{32} \alpha \gamma (\gamma - \alpha) \right] [1 + \text{ordre } \gamma]$$

Si l'on effectue le transfert en respectant constamment la seule condition:

$$\tan \varphi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v + \sqrt{1 + e \cos v}}$$

(soit pratiquement : poussée dirigée selon la bissectrice de l'angle de la tangente et de l'horizontale locale), ce qui laisse une grande liberté et permet en particulier d'envisager des montées en spirale avec des arcs de poussées, etc ... la vitesse caractéristique du transfert monte au maximum à C_M :

$$C_M = 2 \sqrt{\frac{\mu}{A_1}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} - 2 \sqrt{\frac{\mu}{P_2}} + \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}}$$

soit :

$$C_M = C_P + \sqrt{\frac{\mu}{P_1}} \left(\frac{\beta^3 - \alpha^3}{32} \right) [1 + \text{ordre } \gamma] = C_A + \sqrt{\frac{\mu}{P_1}} \frac{(\gamma - \alpha)^3 - (\gamma - \beta)^3}{32} [1 + \text{ordre } \gamma]$$

on obtient ainsi un grand choix de transferts possibles pour une augmentation relative du coût toujours inférieure à :

$$\frac{\beta - \alpha}{8(\gamma + \beta - \alpha)} \left[\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \max[0; 3\gamma(\gamma - \alpha - \beta)] \right]$$

par rapport à l'optimum.

REMARQUE :

pour $\alpha = \beta$: $(\beta - \alpha)$ est nul mais les deux orbites sont tangentes et la liberté indiquée ci-dessus disparaît.

III,3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX SUR LES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES.

Les transferts optimaux entre orbites coplanaires sont donc de quatre modes possibles (chapitre III,1) : à une, deux ou trois impulsions ou bien " par l'infini "; si l'on tient compte du sens des impulsions : soit dans la partie avant de l'angle utile (poussée accélératrice) soit dans la partie arrière (freinage), il y a alors huit modes de transferts optimaux : écrivons $\mathcal{A}$ pour une poussée accélératrice et $\mathcal{F}$ pour un freinage, les huit modes sont :

- 1°) Modes à une impulsion : $\mathcal{A}$ ou bien $\mathcal{F}$
- 2°) Modes à deux impulsions : $\mathcal{A}\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}\mathcal{F}$
- 3°) Modes à trois impulsions : $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{F}$ ou $\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}$
- 4°) " Par l'infini "

Rappelons qu'entre deux impulsions de type $\mathcal{A}$ ou bien entre deux impulsions de type $\mathcal{F}$, la commutation est de type φ_s , tandis qu'entre une impulsion de type $\mathcal{A}$ et une impulsion $\mathcal{F}$ la commutation est de type φ_i ou φ'_i (chapitre III,1).

Les commutations étant définies de manière simple à partir des ellipses intermédiaires correspondantes il est aisé de construire des exemples de transferts optimaux à deux impulsions à partir de ces ellipses intermédiaires, le problème inverse (qui est le problème ordinaire) n'est résolu qu'implicitement.

Nous allons indiquer quel est le mode optimal de transfert en fonction des orbites initiale et finale.

Soient $a_1, e_1, a_2, e_2, \varpi_2$ les éléments des orbites initiale et finale.

Nous supposons que (en utilisant au besoin la réversibilité et les symétries) :

- 1°) $P_1 \leq P_2$ (et si $P_1 = P_2 : A_1 \geq A_2$)
- 2°) $0^\circ \leq \varpi_2 \leq 180^\circ$

(Les transferts optimaux entre orbites coaxiales directes ($\varpi_2 = 0^\circ$) ou inverses ($\varpi_2 = 180^\circ$) ayant été étudiés complètement (chapitres II,4 et III,2.4), on peut supposer même $0^\circ < \varpi_2 < 180^\circ$ et $e_1 > 0$, $e_2 > 0$, les cas $e_1 = 0$ ou bien $e_2 = 0$ rentrant évidemment dans ceux des orbites coaxiales).

Les conditions $P_1 \leq P_2$ et $e_1 e_2 \sin \varpi_2 \neq 0$ entraînent l'impossibilité des modes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}\mathcal{F}$, il reste donc six modes possibles : $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{F}$, $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{F}$, $\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{F}$ et " par l'infini ".

Les conditions $0^\circ < \varpi_2 < 180^\circ$ et $e_1 e_2 > 0$ entraînent que les poussées accélératrices ($\mathcal{A}$) ont lieu en phase montante ($\sin v > 0$) et les freinages ($\mathcal{F}$) en phase descendante ($\sin v < 0$).

Nous poserons :

C_2 = vitesse caractéristique du transfert optimal $a_1, e_1 \longrightarrow a_2, e_2, \varpi_2$

C_H = vitesse caractéristique du transfert de HOHMANN : $a_1, e_1 \longrightarrow a_2, e_2, 0^\circ$

C_P = vitesse caractéristique du transfert "par les périgées" : $a_1, e_1 \longrightarrow a_2, e_2, 180^\circ$

C_A = vitesse caractéristique du transfert "par les apogées" : $a_1, e_1 \longrightarrow a_2, e_2, 180^\circ$

(C_P et C_A sont définis au chapitre III,2.4)

C_∞ = vitesse caractéristique du transfert "par l'infini"

$$C_\infty = \sqrt{\frac{2\mu}{P_1}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \sqrt{\frac{2\mu}{P_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}}$$

Pour $\varpi_2 = 0^\circ$: $C_2 = \min [C_H ; C_\infty]$

Pour $\varpi_2 = 180^\circ$: $C_2 = \min [C_P ; C_A ; C_\infty]$

C_2 étant une fonction non décroissante de ϖ_2 à a_1, e_1, a_2, e_2 fixés :

$$\min [C_H ; C_\infty] \leq C_2 \leq \min [C_P ; C_A ; C_\infty] \text{ quel que soit } \varpi_2.$$

Voici tout d'abord quelques remarques générales.

1°) Si $C_\infty \leq C_H$ le mode optimal de transfert est "par l'infini" quel que soit ϖ_2 ($\neq 0^\circ$) (comparaison de C_H et C_∞ : voir figure 9 et chapitre II,4).

2°) Pour $e_1, e_2 \sin \varpi_2 \neq 0$ le transfert optimal est à une impulsion *si et seulement si* :

A. Les deux orbites données sont sécantes.

B. Au point d'intersection le plus bas (où se fait alors l'impulsion optimale) le $\vec{\Delta V}$ impulsionnel nécessaire est :

B_1 - dans l'angle utile local de chacune des deux orbites,

B_2 - tel que $\Delta V \leq C_\infty$ (si cette dernière condition est seule non satisfaite, le transfert optimal est "par l'infini").

Ces transferts sont rares à cause de la condition B_1 et de la petitesse des angles utiles (pour $P_1 \leq P_2$ il faut $P_1 < P_2 < A_1 < A_2$ et le périgée P_2 doit être à l'extérieur de l'orbite O_1 mais bien entendu cela ne suffit pas).

REMARQUE : si $e_1, e_2 \sin \varpi_2 = 0$ il faut que les deux orbites données soient tangentes, le transfert optimal est alors soit une impulsion au point de contact soit "par l'infini".

3°) Les transferts optimaux à trois impulsions sont eux aussi très rares (confère chapitre III,2.2), ils ne se rencontrent que si les conditions (non suffisantes) suivantes sont remplies :

$$A. : \quad \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{a_1} + \frac{P_2}{a_2} < \frac{11 - \sqrt{41}}{16} = 0,2873 \dots$$

(ce qui entraîne $e_1 + e_2 > 1,712 \dots$)

$$B. : \quad 0^\circ < \varpi_2 < 22^\circ$$

$$C. : \quad \frac{9}{25} < \frac{P_1}{P_2}$$

(Rappelons que nous avons choisi : $P_1 \leq P_2$ et $0^\circ \leq \varpi_2 \leq 180^\circ$).

La discussion entre les deux modes de transferts optimaux à trois impulsions (*AAI* ou bien *ATF*) est aisée :

Si $a_1^2 e_1^7 < a_2^2 e_2^7$ le mode optimal est *AAI*

Si $a_1^2 e_1^7 > a_2^2 e_2^7$ le mode optimal est *ATF*

(Si $a_1^2 e_1^7 = a_2^2 e_2^7$ le transfert optimal n'est jamais "à trois impulsions").

La figure 72 présente la région du plan e_1, e_2 où se rencontrent des transferts "à trois impulsions", pour $P_1 \leq P_2$, de mode $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{F}$ (donc pour $a_1^2 e_2^2 < a_2^2 e_1^2$), la région correspondant à l'autre cas est évidemment symétrique par rapport à la droite $e_1 = e_2$.

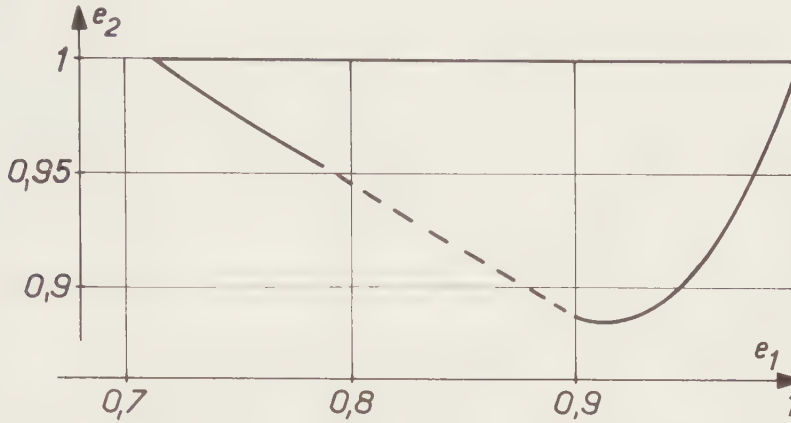


Fig. 72 - Zone des transferts "à trois impulsions" de mode $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{F}$ (deux poussées accélératrices puis un freinage) dans le plan e_1, e_2 . La partie en pointillé de la limite n'est pas connue avec précision.

(Three-impulse $\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{F}$ domain in the plane e_1, e_2)

La courbe limite a une pente de 25/9 en ($e_1 = e_2 = 1$) et une pente de

$$\frac{4920 - 2968\sqrt{41}}{20065} = -0,70194 \dots \text{ en } (e_1 = \frac{5 + \sqrt{41}}{16} = 0,7127 \dots; e_2 = 1)$$

III,3.1. CAS DES ORBITES "DÉTACHÉES".

Nous dirons que les deux orbites coplanaires données sont "détachées" si

$$P_1 < A_1 \leq P_2 < A_2.$$

Les orbites sont alors intérieures quel que soit $\varpi_2 (\neq 180^\circ)$.

Dans ce cas on obtient :

$$C_H = \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \frac{(A_2 - P_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{A_2 P_1 (A_2 + P_1)}}$$

$$C_P = \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \frac{(P_2 - P_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{P_1 P_2 (P_1 + P_2)}}$$

$$C_A = \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} + \frac{(A_2 - A_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{A_2 A_1 (A_2 + A_1)}}$$

bien entendu : $C_H < C_P$ et $C_H < C_A$.

Entre deux orbites coplanaires "détachées" le transfert optimal est toujours du type $\mathcal{A}\mathcal{A}$ ou du type "par l'infini" (Si l'on part de l'orbite extérieure le mode $\mathcal{A}\mathcal{A}$ doit être remplacé par le mode inverse $\mathcal{F}\mathcal{F}$).

Discussion entre ces deux modes :

1^{er} Cas : $\min(C_A ; C_P) \leq C_\infty$: le mode "par l'infini" n'intervient pas.

ϖ_2	0°	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT DE MODE $\mathcal{A}\mathcal{A}$ TRANSFERT PAR LES PÉRIGÉES OU PAR LES APOGÉES
C_2	C_H	$\min(C_A ; C_P)$

2^e Cas : $C_H \leq C_\infty < \min(C_A ; C_P)$: il y a un angle limite ϖ_ℓ tel que :

ϖ_2	0°	ϖ_ℓ	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT DE MODE $\mathcal{A}\mathcal{A}$	TRANSFERT "PAR L'INFINI"
C_2	C_H	C_∞	C_∞

3^e Cas : $C_\infty < C_H$: le transfert optimal est de mode "par l'infini" et coûte C_∞ quel que soit ϖ_2 .

La figure 73 résume la discussion en fonction des paramètres $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ et e_2 (qui suffisent pour comparer C_∞ avec C_H et C_P), les courbes $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ y sont celles de la figure 71.

Exemple :

$$\mu = 1 ; P_1 = 1 ; A_1 = 2 ; P_2 = 3 ; A_2 = 4$$

on obtient le tableau suivant :

ϖ_2	0°	180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT DE TYPE $\mathcal{A}\mathcal{A}$ TRANSFERT PAR LES PÉRIGÉES
C_2	$C_H = 0,2570$	$C_P = 0,2791$

REMARQUES PRATIQUES :

Si : $\frac{A_2}{P_1} \leq 8,7967$: le transfert optimal est de type $\mathcal{A}\mathcal{A}$.

Si : $(\sqrt{2} - 1)(1 - \cos \varpi_2) \geq \min\left[\frac{1 - e_1}{e_2}, \frac{1 - e_2}{e_1}\right]$: le transfert optimal est "par l'infini" (cette expression est la seule présentée où intervienne le paramètre ϖ_2 , elle est donc dans certains cas plus efficace que la discussion de la figure 73).

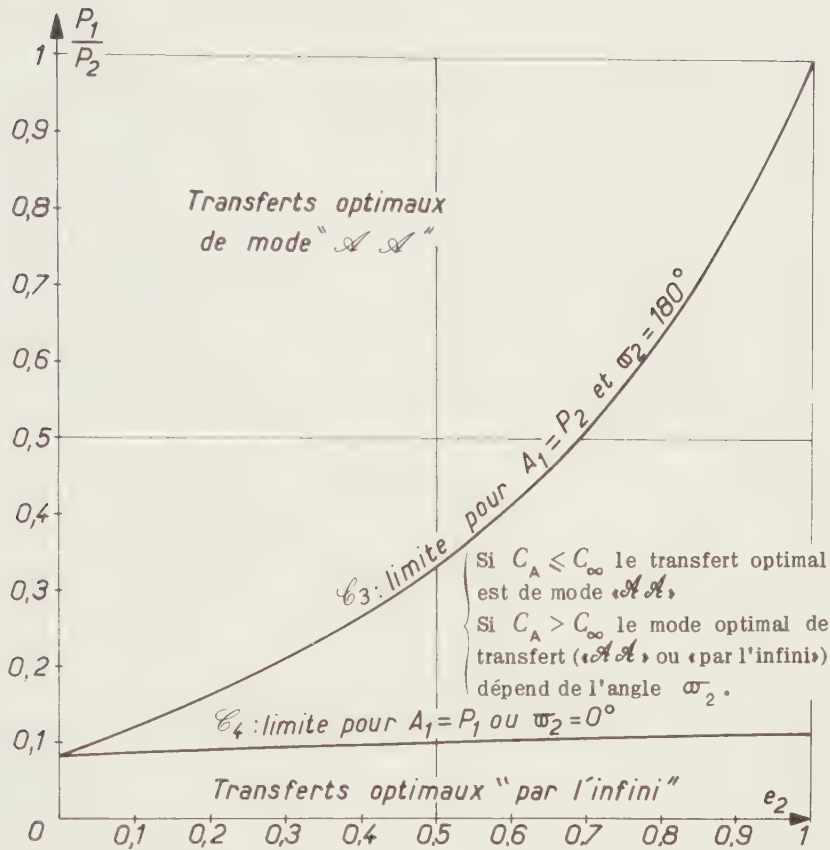


Fig. 73 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires "détachées" ($P_1 < A_1 \leq P_2 < A_2$).

(Determination of the optimal transfer type between "detached" coplanar orbits : $P_1 < A_1 \leq P_2 < A_2$)

III,3.2. CAS DES ORBITES "EMBRASSÉES".

Nous dirons que les deux orbites coplanaires données sont "embrassées" si $P_1 \leq P_2 < A_2 \leq A_1$.

Les orbites sont alors sécantes quel que soit w_2 ($\neq 0^\circ$) et l'on a toujours $e_1 \geq e_2$.

Dans ce cas on obtient :

$$C_H = \sqrt{\frac{2\mu(A_1 + P_2)}{A_1 P_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} - \sqrt{\frac{\mu A_2}{a_2 P_2}}$$

$$C_A = \sqrt{\frac{2\mu(A_1 + A_2)}{A_1 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} - \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}}$$

C_p , qui est supérieur à C_A , ne joue ici aucun rôle.

Entre deux orbites coplanaires "embrassées" le transfert optimal est toujours du mode "AF" ou "AFF" ou "par l'infini".

(Le mode AFF est à remplacer par le mode inverse AAF si l'on effectue le transfert dans l'autre sens : en partant de l'ellipse de plus haut périégée).

Discussion entre ces trois modes.

1^{er} Cas : $C_A < C_\infty$: seul le mode AF intervient

ω_2	0°	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT DE MODE "AF" TRANSFERT PAR LES APOGÉES
C_2	C_H	C_A

2^e Cas : $C_H \leq C_\infty < C_A$ ce cas se subdivise en trois :

2.1. : Le mode AFF n'apparaît pas.

ω_2	0°	ω_b	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT DE MODE "AF"	TRANSFERT "PAR L'INFINI"
C_2	C_H	C_∞	C_∞

Si le mode AFF apparaît il y a deux dispositions possibles :

2.2.

ω_2	0°	ω_{l1}	ω_{l2}	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	"AF"	"AFF"	"PAR L'INFINI"
C_2	C_H		C_∞	C_∞

2.3.

ω_2	0°	ω_{l1}	ω_{l2}	ω_{l3}	180°
MODE OPTIMAL	TRANSFERT DE HOHMANN	"AF"	"AFF"	"AF"	"PAR L'INFINI"
C_2	C_H			C_∞	C_∞

ω_{l1} et ω_{l2} angles limites du cas "AFF" sont toujours inférieurs à 22° .

3^e Cas : $C_\infty < C_H$ le transfert optimal est de mode "par l'infini" et coûte C_∞ quel que soit ϖ_2 .

La figure 74 résume la discussion en fonction des paramètres e_1 , e_2 et $\frac{P_1}{P_2}$ (les courbes en trait plein sont les courbes BC et EC de la figure 68 (3 - 2 - 4 - 1); la courbe en pointillé, en haut à droite, est entièrement à l'intérieur de la zone définie sur la figure 72 (en intervertissant e_1 et e_2), elle passe par

$$e_1 = 1; e_2 = \frac{5 + \sqrt{41}}{16} = 0,7127\dots \text{ et par } e_1 = e_2 = e_0 \simeq 0,9250$$

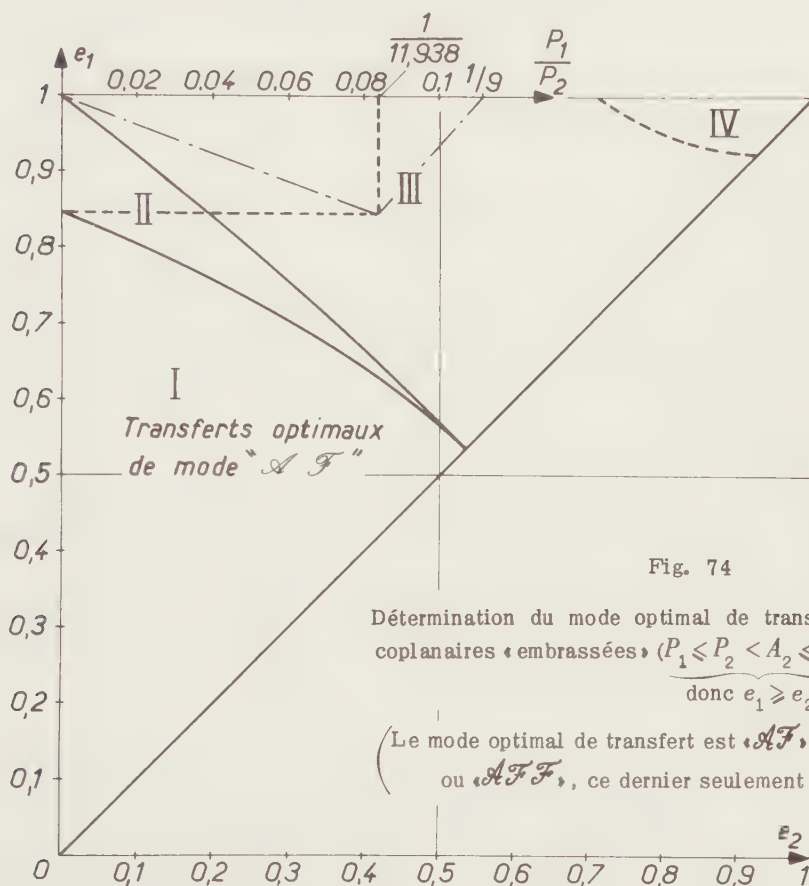


Fig. 74

Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires «embrassées» ($P_1 \leq P_2 < A_2 \leq A_1$).

donc $e_1 \geq e_2$

(Le mode optimal de transfert est «AF» ou «par l'infini» ou «AFF», ce dernier seulement en zone IV.)

(Determination of the optimal transfer type between coplanar orbits when $P_1 \leq P_2 < A_2 \leq A_1$)

1°) Si le point $\left[\frac{P_1}{P_2}, e_1\right]$ est au-dessus de la ligne en trait mixte : $C_H > C_\infty$.

le transfert optimal est «par l'infini».

2°) Sinon $C_H \leq C_\infty$ alors :

A) point (e_2, e_1) en zone I : le transfert optimal est de mode «AF».

B) point (e_2, e_1) en zone III : le mode optimal de transfert («AF» ou «par l'infini») dépend de l'angle ϖ_2 .

C) point (e_2, e_1) en zone II : il faut comparer C_A et C_∞ : Si $C_A \leq C_\infty$: mêmes conclusions qu'en zone I; si $C_A > C_\infty$: mêmes conclusions qu'en zone III.

D) point (e_2, e_1) en zone IV : le mode optimal de transfert peut être «AF», ou «par l'infini» ou même «AFF», (ce dernier cas exige $\varpi_2 < 22^\circ$ et $\frac{P_1}{P_2} > \frac{9}{25}$).

Exemple :

$$\mu = 1; P_1 = 1; P_2 = 2; A_2 = 3; A_1 = 4$$

on obtient :

ϖ_2	0°	180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	TRANSFERT PAR LES APOGÉES
C_2	$C_H = 0,1339$	$C_A = 0,2475$

On remarquera que les limites de C_2 sont beaucoup plus écartées que dans le cas des orbites "détachées" (III,3.1).

REMARQUES PRATIQUES :

Si $e_1 + 0,579 e_2 \leq 0,845$ le transfert optimal est de mode $\mathcal{AF}$.

Si $\frac{\delta}{9}(\sqrt{2} - 1)(1 - \cos \varpi_2) \geq \frac{1 - e_1}{e_2}$ le transfert optimal est "par l'infini".

III,3.3. CAS DES ORBITES "CROISÉES".

Nous dirons que les deux orbites coplanaires données sont "croisées" si $P_1 < P_2 < A_1 < A_2$

Il y a alors un angle ϖ_r tel que :

$\varpi_2 < \varpi_r$: les deux orbites données sont intérieures

$\varpi_2 = \varpi_r$: les deux orbites données sont tangentes

$\varpi_2 > \varpi_r$: les deux orbites données sont sécantes.

Dans ce cas on obtient :

$$C_H = \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu A_1}{a_1 P_1}} + \frac{(A_2 - P_1) \sqrt{2\mu}}{\sqrt{A_2 P_1 (A_2 + P_1)}}$$

$$C_A = \sqrt{\frac{2\mu (A_1 + A_2)}{A_1 A_2}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} - \sqrt{\frac{\mu P_2}{a_2 A_2}}$$

C_p , qui est supérieur à C_A , ne joue alors aucun rôle.

Le cas des orbites coplanaires "croisées" est de loin le plus compliqué des trois, on y trouve des transferts des six types possibles compatibles avec $P_1 < P_2$:

" $\mathcal{A}$ ", " $\mathcal{AA}$ ", " $\mathcal{AF}$ ", " $\mathcal{AAF}$ ", " $\mathcal{AFF}$ " et "par l'infini".

Afin de préciser les résultats nous poserons :

$$1^o) \quad C_T = (H_2 - H_1) \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_2 a_1 (p_2 - p_1)}} = \text{vitesse caractéristique du transfert mono-impulsionnel entre orbites tangentes (cas obtenu pour } \varpi_2 = \varpi_r \text{ en un point tel que}$$

$$r = r_T \equiv \frac{2a_2 a_1 (p_2 - p_1)}{a_2 p_2 - a_1 p_1}).$$

C_T est aussi la vitesse caractéristique du transfert mono-impulsionnel pour lequel l'impulsion en question est horizontale (cas obtenu pour $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_H > \bar{\omega}_T$ en un point tel que

$$r = r_H \equiv \sqrt{\frac{a_2 a_1 (p_2 - p_1)}{a_2 - a_1}} < r_T).$$

2°) C_α = minimum par rapport à α de :

$$\left[\sqrt{3\alpha^2 + \frac{2H_2}{\mu}\alpha^3 - \frac{\mu}{a_2}} - \sqrt{3\alpha^2 + \frac{2H_1}{\mu}\alpha^3 - \frac{\mu}{a_1}} \right]$$

= vitesse caractéristique du transfert mono-impulsionnel le moins coûteux (cas obtenu pour $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_\alpha$; $r = r_\alpha \equiv \frac{\mu}{\alpha^2} (\bar{\omega}_T < \bar{\omega}_\alpha < \bar{\omega}_H$; $r_T > r_\alpha > r_H$)
 α est la vitesse circulaire locale en r_α).

Généralement $\bar{\omega}_T$, $\bar{\omega}_\alpha$, $\bar{\omega}_H$ d'une part, r_T , r_α , r_H d'autre part, sont très voisins; pour les cas de faible excentricité :

$$\bar{\omega}_\alpha \simeq \frac{3\bar{\omega}_T + \bar{\omega}_H}{4} \quad \text{et} \quad r_\alpha \simeq \frac{r_T + r_H}{2}.$$

Ces éléments étant définis on obtient les résultats suivants :

1^{er} Cas : $C_A \leq C_\infty$

$\bar{\omega}_2$	0°	$\bar{\omega}_T$	$\bar{\omega}_\alpha$	$\bar{\omega}_{\ell_1}$	$\bar{\omega}_{\ell_2}$	$\bar{\omega}_H$	180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	"AA"	"AA"	"AA"	"A"	"AF"	TRANSFERT PAR LES APOGÉES
C_2	C_H	C_α			C_T	C_A	

Si $\bar{\omega}_\alpha < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_H$ (ou même si simplement $\bar{\omega}_T \leq \bar{\omega}_2 \leq \bar{\omega}_H$) on peut déterminer le mode optimal de transfert en étudiant, au point de rencontre le plus bas des deux orbites, l'impulsion nécessaire pour passer de l'une sur l'autre (impulsion qui est précisément l'impulsion optimale si le transfert est de type "A"), soit φ l'angle déterminant la direction de cette impulsion, φ_{S_1} , φ_{i_1} (ou φ'_{i_1}), Φ_1 les angles ordinaires relatifs à l'angle utile local et à la tangente pour la première orbite; φ_{S_2} , φ_{i_2} (ou φ'_{i_2}), Φ_2 les angles correspondants pour la seconde orbite : Si $\varphi > \min(\varphi_{S_1}, \varphi_{S_2})$: le transfert optimal est de type "AA".

Si : $\max(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}) \leq \varphi \leq \min(\varphi_{S_1}, \varphi_{S_2})$: le transfert optimal est de type "A".

Enfin si : $\varphi < \max(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2})$: le transfert optimal est de type "AF".

Bien entendu dans le cas présent :

$$\begin{cases} 0 < \varphi_{i_1} \leq \varphi_{S_1} < \Phi_1 \\ 0 < \varphi_{i_2} \leq \varphi_{S_2} < \Phi_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \Phi_2 \leq \Phi_1 \end{cases}$$

L'étude qualitative du mode optimal de transfert est ainsi complète.

Si les excentricités sont faibles : $\bar{\omega}_{\ell_1} = \bar{\omega}_\alpha + \frac{3}{8}(\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_T) \max[e_1^2, e_2^2] + \text{ordre } e^3(\bar{\omega}_\alpha - \bar{\omega}_T)$

$$\text{et} \quad \bar{\omega}_{\ell_2} \simeq \frac{20\bar{\omega}_\alpha + 7\bar{\omega}_H}{27}.$$

2^e Cas : $C_H < C_\infty < C_A$

Il y a trois cas principaux :

2.1. - Les transferts "à trois impulsions" n'apparaissent pas.

Il y a alors un angle ω_ℓ , à placer sur le tableau du premier cas, à partir duquel les transferts optimaux sont "par l'infini".

On obtient ainsi les quatre possibilités suivantes (sans compter les cas limites) :

ω_2	0°	ω_T	ω_{ℓ_1}	ω_{ℓ_2}	180°	
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	"AA" "AA"	"AA" "AA"	"A" "A"	"AF" "PAR L'INFINI"	"∞"
		"AA" "AA"	"AA" "PAR L'INFINI"	"PAR L'INFINI"		
		"AA"	"AA"	"PAR L'INFINI"		
		"AA"	"PAR L'INFINI"			
C_2	C_H					C_∞

La comparaison de C_∞ avec C_α et C_T aide bien entendu à placer ω_ℓ .

La méthode indiquée dans le 1^{er} cas pour comparer les modes "AA", "A" et "AF" au voisinage de ω_{ℓ_1} et ω_{ℓ_2} est aussi valable dans ce cas-ci, mais bien entendu le mode "par l'infini" doit après être comparé au meilleur des trois premiers (la comparaison est immédiate dans le cas du mode "A").

On peut remarquer :

Si : $\min(\varphi_{S_1}, \varphi_{S_2}) < \varphi < \max(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2})$ le transfert optimal est "par l'infini" (ceci ne se rencontre évidemment pas dans le cas où $C_A \leq C_\infty$).

Si au point de rencontre le plus bas des deux orbites, on est sur un "arc balistique" (c'est-à-dire un arc sans angle utile ce qui exige e_1 ou $e_2 > e_0 \simeq 0,9250$ sur l'une ou l'autre des deux orbites (ou sur les deux) le transfert optimal n'est évidemment pas de type "A", il est de type "AA" ou "par l'infini" si $e_1 < e_0 = 0,9250 \dots$ et de type "AF" ou "par l'infini" si $e_1 > e_0$.

2.2. - Il y a des transferts "à trois impulsions", de type "AFF" (donc $a_1^2 e_1^7 > a_2^2 e_2^7$)

Ce cas est exceptionnel, il y a deux possibilités :

ω_2	0°	ω_T	ω_{ℓ_1}	ω_{ℓ_2}	ω_{ℓ_3}	ω_{ℓ_4}	ω_ℓ	180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	"AA"	"AA"	"A"	"AF"	"AFF"	"AF"	"par l'∞"
							"PAR L'INFINI"	
C_2	C_H		C_α				C_∞	C_∞

2.3. - Il y a des transferts "à trois impulsions", de type "AAF" (donc $a_1^2 e_1^7 < a_2^2 e_2^7$).

Il y a alors sept possibilités (sans compter les cas limites) :

ω_2	ω_T										180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	TRANSFERT DE HOHMANN	AA		AA	A	AF	AAF	AF	"PAR L'INFINI"		
		AA		AA	A	AF	AAF	"PAR L'INFINI"			
		AA		AA	AAF		AF	"PAR L'INFINI"			
		AA		AA	AAF		"PAR L'INFINI"				
		AA	AAF	AAF	AF	"PAR L'INFINI"					
		AA	AAF	AAF	"PAR L'INFINI"						
		AA	AAF	"PAR L'INFINI"							
C_2	C_H										C_∞

3^e Cas : $C_\infty \ll C_H$

Le mode optimal de transfert est toujours "par l'infini" quel que soit ω_2 .

La figure 75 résume la discussion en fonction des paramètres e_2 et P_1/P_2 dans le cas des orbites non sécantes : $\omega_2 \leq \omega_T$ ou "peu sécantes" : $\omega_T < \omega_2 \leq \omega_\alpha$ le mode optimal de transfert y est toujours "AA" ou "AAF" ou "par l'infini" (Cette figure est très semblable à la figure 73, la courbe supplémentaire (en pointillé) passe par $e_2 = 1$; $P_1/P_2 = 9/25$ et par $e_2 \simeq 0,926$; $P_1/P_2 = 1$)

La figure 76 résume la discussion en fonction des paramètres e_2 et e_1 dans le cas des orbites "très sécantes" : $\omega_\alpha < \omega_2 \leq 180^\circ$, les courbes qui limitent les zones I et II et les zones II et III sont les courbes EC, CD, et ED de la figure 68.

Exemple :

$$\mu = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, A_1 = 3, A_2 = 4$$

$$r_T \equiv \frac{2 a_1 a_2 (p_2 - p_1)}{a_2 p_2 - a_1 p_1} = 2,8$$

$$\omega_T = 60^\circ$$

$$r_H \equiv \sqrt{\frac{a_1 a_2 (p_2 - p_1)}{a_2 - a_1}} = \sqrt{7}$$

$$\omega_H = 61^\circ,367$$

$$C_T = \frac{H_2 - H_1}{r_H} = \frac{1}{\sqrt{42}} = 0,1543$$

$$r_\alpha = 2,726 \dots$$

$$\omega_\alpha = 60^\circ 35'$$

$$C_\alpha = 0,1519$$

d'où pratiquement le tableau :

ϖ_2	0°	60°	$60^\circ,38$	$60^\circ,62$	180°
MODE OPTIMAL DE TRANSFERT	ORBITES INTÉRIEURES		ORBITES SÉCANTES		
	TRANSFERT DE HOHMANN	"AA"	"AA"	"A"	"AF" LES APOGÉES
C_2	$C_H = 0,1322$	0,1519		0,1522	$C_A = 0,2636$

Les transferts optimaux de mode "AAF", exigent $\varpi_2 < 22^\circ$ et $A_1 + P_1 > 6,32 P_2$

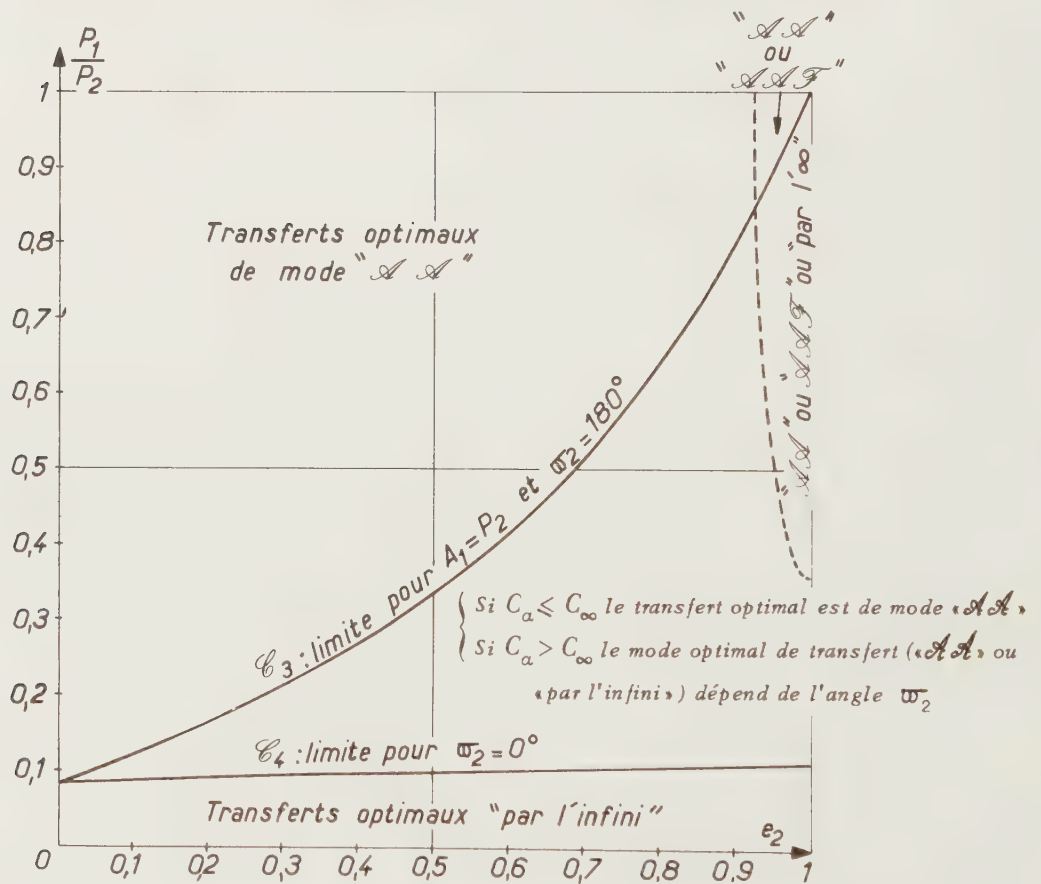


Fig. 75 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires «croisées», non sécantes ou «peu sécantes».

$$(P_1 < P_2 < A_1 < A_2; 0^\circ \leq \varpi_2 \leq \varpi_a)$$

(Determination of the optimal type of transfer between "crossed", non-intersecting or "slightly-intersecting" coplanar orbits :

$$(P_1 < P_2 < A_1 < A_2; 0^\circ \leq \varpi_2 < \varpi_a)$$

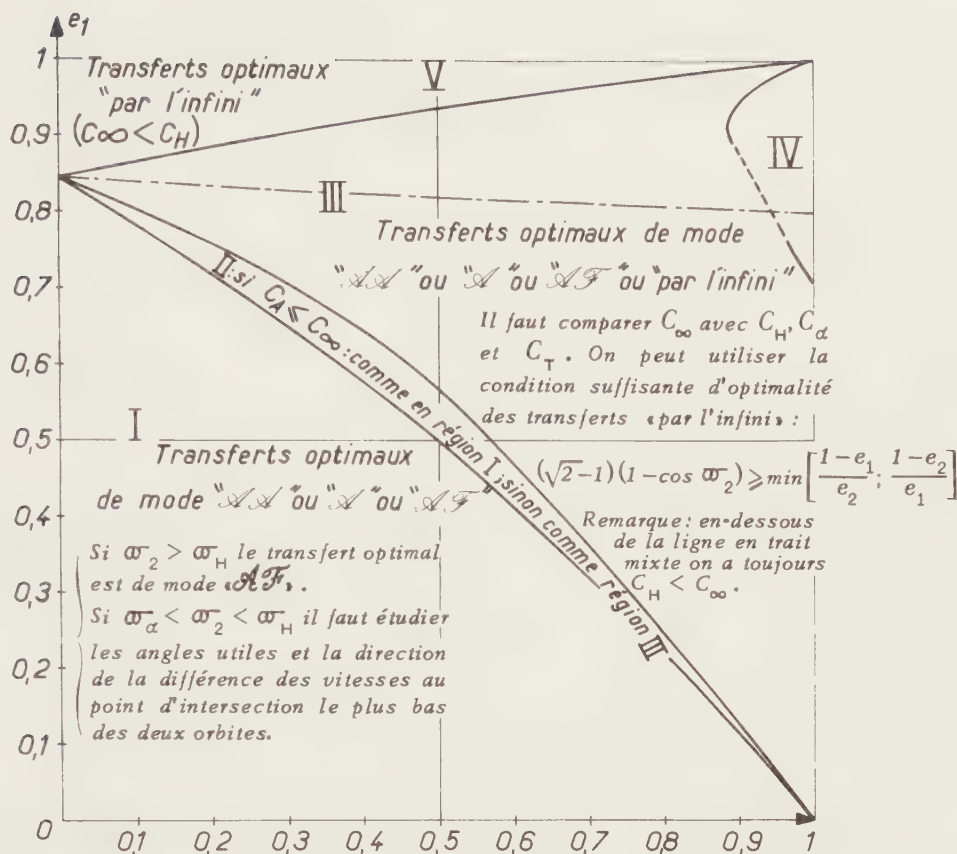


Fig. 76 - Détermination du mode optimal de transfert entre orbites coplanaires « croisées », « très sécantes »

$$(P_1 < P_2 < A_1 < A_2; \varpi_1 < \varpi_2 \leq 180^\circ)$$

(Les transferts à trois impulsions, n'apparaissent qu'en zone IV (identique ou à peine supérieure à la zone indiquée figure 72), ils exigent $\varpi_2 < 22^\circ$ et $\frac{P_1}{P_2} > \frac{9}{25}$, le mode *AFI*, exige en plus $e_1 > e_2$ il est donc exceptionnel).

(Determination of the optimal transfer type between "crossed", "very-intersecting" coplanar orbits: $P_1 < P_2 < A_1 < A_2$; $\varpi_1 < \varpi_2 \leq 180^\circ$)

Les limites de C_2 sont resserrées lorsque les orbites sont non sécantes ou "peu sécantes", elles sont au contraire très écartées lorsque les orbites sont "très sécantes", on retrouve les conclusions déjà obtenues pour les orbites "détachées" ou "embrassées": C_2 est peu sensible à ω_2 , à P_1, A_1, P_2, A_2 , constants, si les orbites données sont intérieures, par contre C_2 est très sensible à ω_2 si les orbites données sont sécantes.

REMARQUES PRATIQUES :

Si les orbites sont non sécantes ou "peu sécantes" et si $\frac{A_2}{P_7} \leq 8,7967$ le transfert optimal est de type "AA".

Si : $e_1 + e_2 \leq 1 - 0,31 \cdot \max \left(0; \frac{1}{2} - e_2 \right)$: le transfert optimal est à une ou deux impulsions.

Si : $(\sqrt{2} - 1)(1 - \cos \omega_2) \geq \min \left(\frac{1 - e_1}{e_2}; \frac{1 - e_2}{e_1} \right)$ le transfert optimal est "par l'infini".

III,3.4. REMARQUES PRATIQUES GÉNÉRALES SUR LES TRANSFERTS ENTRE ORBITES COPLANAIRES.

Posons

$$k = \frac{\max(A_1; A_2)}{\min(P_1; P_2)} ; (k \geq 1).$$

Si $k \leq 21$ le transfert optimal n'est pas "à trois impulsions".

Si $k \leq 3,3041 \dots$ (= racine de $8x^3 - 33x^2 + 22x = 1$), le transfert optimal est à une ou deux impulsions.

Si les deux orbites données sont non sécantes ou "croisées, peu sécantes" et si $k \leq 8,7967$ le transfert optimal est de mode "AA" (ou "JJ" dans le sens descendant), dans ce cas on a toujours :

$$C_H \leq C_2 \leq C_H \sqrt{1 + \frac{3}{16} \cdot \frac{(k-1)^2}{k}}$$

inégalités très intéressantes si k est faible.

$$\text{Si } \frac{8}{9} (\sqrt{2} - 1)(1 - \cos \omega_2) \geq \min \left[\frac{1 - e_1}{e_2}; \frac{1 - e_2}{e_1} \right]$$

le transfert optimal est "par l'infini".

Considérons un espace limité inférieurement par le rayon R de la planète attirante, le transfert optimal, entre orbites coplanaires, le plus onéreux est obtenu pour :

$$1^o) \quad A_1 = P_1 = R ; \quad A_2 = P_2 = 11,938 R$$

dans le cas des orbites "détachées"

$$(\text{on obtient } C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R}} [\sqrt{2} - 1] \left[1 + \frac{1}{\sqrt{11,938}} \right] = 0,534 \sqrt{\frac{\mu}{R}} (= 4,22 \text{ km/s dans le cas de la terre})$$

2°) $A_1 = P_1 = P_2 = R$; A_2 très grand dans le cas des orbites "croisées" ou "embrassées" (on obtient :

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{R}} (\sqrt{2} - 1) \quad (= 3,275 \text{ km/s dans le cas de la terre})$$

Ainsi qu'on le voit les transferts optimaux entre orbites coplanaires sont toujours nettement moins coûteux que les mises en orbite.

III,4. POINT DE VUE PRATIQUE SUR LES TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES COPLANAIRES ET ENTRE ORBITES COAXIALES DIRECTES.

L'étude théorique ci-dessus présente plusieurs inconvénients du point de vue pratique : tout d'abord les solutions optimales sont toujours impulsionnelles et les fusées réalisables n'ont qu'une poussée finie, d'autre part dans de nombreux cas le transfert optimal est "par l'infini" et on ne peut

évidemment que s'en approcher plus ou moins il est alors important de connaître la perte minimale par rapport à l'optimum en fonction de la durée T , nécessairement finie, dont on dispose et il est intéressant de connaître, au moins approximativement, le transfert optimal pour cette durée fixe.

III,4.1. REMPLACEMENT D'UNE IMPULSION PAR UN ARC DE POUSSÉE.

L'étude du remplacement optimal d'une impulsion par un ou des arcs de poussée sera faite de manière générale en cinquième partie; pour le cas des orbites coplanaires nous diront simplement ceci :

Si entre deux orbites coplanaires le mode optimal de transfert est " $\mathcal{AA}$ " ou " $\mathcal{FF}$ " le coût du transfert est très peu sensible à l'angle ϖ_2 en effet dans ces cas :

$C_H \leq C_2 \leq \min(C_A, C_P, C_\infty)$ si les orbites sont "détachées" (c'est-à-dire si $\min(A_1, A_2) \leq \max(P_1, P_2)$) et $C_H \leq C_2 \leq \min(C_\alpha, C_\infty)$ si les orbites données sont "croisées" et "non ou peu sécantes" (c'est-à-dire si

$$P_1 < P_2 < A_1 < A_2 \text{ ou } P_2 < P_1 < A_2 < A_1 \text{ et } |\varpi_2| \leq \varpi_\alpha).$$

Ces limites sont assez resserrées, posons en effet comme dans le chapitre précédent :

$$\frac{\max(A_1, A_2)}{\min(P_1, P_2)} = k; \text{ puis } k - 1 = z (\geq 0)$$

on obtient dans tous les cas de transferts optimaux de mode " $\mathcal{AA}$ " ou " $\mathcal{FF}$ " :

$$C_H \leq C_2 \leq g \cdot C_H$$

avec $g = \max.$ par rapport à x (pour $1 \leq x \leq k$) de :

$$\frac{\frac{\infty}{\sqrt{x+1}} - \frac{\infty}{\sqrt{k+x}}}{\frac{k-1}{\sqrt{k+1}} - \frac{k}{\sqrt{k+x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}}$$

soit $g \sim \frac{2}{3} \sqrt[3]{2k}$ si $k \gg 1$

$$g = 1 + \frac{3z^2}{32} - \frac{3z^3}{32} + \frac{133z^4}{1536} - \frac{61z^5}{768} + (\text{ordre } z^6) ; \text{ si } z \simeq 0 (\text{donc } k \simeq 1).$$

$$g \leq \sqrt{1 + \frac{3z^2}{16k}} \text{ quel que soit } k$$

ainsi

$$\begin{aligned} g &= 1,045 & \text{si} & \quad k = 2 \\ g &= 1,114 & \text{si} & \quad k = 3 \\ g &= 1,25 \dots & \text{si} & \quad k = 5 \end{aligned}$$

en particulier pour les orbites "atmosphériques" (orbites dont l'apogée est à moins de 1000 km d'altitude) g reste compris entre 1 et $1 + \frac{1}{500}$, C_H constitue donc une approximation excellente de C_2 .

Cette faible sensibilité des transferts optimaux de mode " $\mathcal{AA}$ " ou " $\mathcal{FF}$ " au paramètre ϖ_2 indique que l'optimum est très "plat" et une grande variété de transferts va donner des consommations à peine supérieure à C_2 .

Ainsi il suffit de vérifier constamment les relations :

$$\tan \varphi = \frac{e \sin v}{1 + e \cos v + \sqrt{1 + e \cos v}} \text{ et } \operatorname{sgn} \cos \varphi = \operatorname{constante}$$

(c'est-à-dire pratiquement : poussée dirigée selon la bissectrice de la tangente et de l'horizontale locales) ce qui donne beaucoup de liberté, autorise des arcs de poussée, des montées en spirale etc.... pour que la consommation C_2' reste toujours inférieure à :

C_α si les orbites données sont "croisées" et "non ou peu sécantes"

$$C_M = 2\sqrt{\frac{\mu}{A_1}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{\alpha_1 A_1}} + \sqrt{\frac{\mu A_2}{\alpha_2 P_2}} - 2\sqrt{\frac{\mu}{P_2}}$$

si les orbites données sont "détachées" (en prenant $P_1 < P_2$).

C_M peut être supérieur à gC_H mais reste inférieur à $C_H \sqrt{1 + \frac{3Z^2}{16K}}$ très proche de C_H et C_2 si K est petit.

REMARQUE : si les orbites sont "croisées, peu sécantes" la liberté dont on parle ci-dessus est très restreinte.

III,4.2. REMARQUES PRATIQUES SUR LES TRANSFERTS OPTIMAUX "PAR L'INFINI".

Comme on ne dispose évidemment dans la pratique que d'un temps fini, si long soit il, et que les transferts optimaux "par l'infini" demandent un temps de transfert illimité on ne peut plus se contenter de l'hypothèse de la durée indifférente pour rechercher le transfert optimal et l'on est obligé de tenir compte d'une durée limitée T pour effectuer le transfert.

1^{er} Cas : La durée T est très grande devant la période de révolution sur les orbites O_1 et O_2 .

Le problème du transfert optimal, compte-tenu de la durée T , est alors assez simple si les deux orbites données sont coaxiales directes (coplanaires ou non).

La solution optimale est pratiquement obtenue par l'utilisation de deux ellipses intermédiaires O' et O'' très allongées, d'apogée commun A et quasi-tangentes aux orbites données en leur périégée (fig. 77); il y a trois impulsions : en P_1 , en A et finalement en P_2 (en toute rigueur les orbites O' et O'' ne sont pas coaxiales et la deuxième impulsion n'est pas en l'apogée commun A mais à une distance d'ordre de $1/\sqrt{A}$ de chacun de leur apogée).

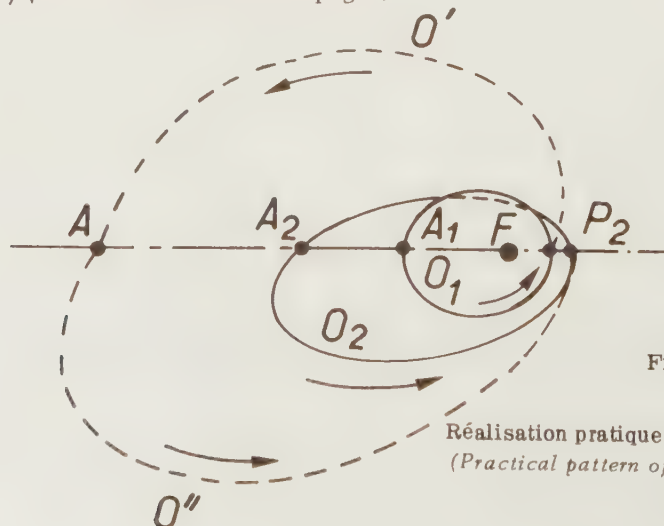


Fig. 77

Réalisation pratique d'un transfert par l'infini.
(Practical pattern of a transfer "by infinity")

La partie principale de la perte δC_2 par rapport au transfert "par l'infini" est, en fonction de T :

$$\delta C_2 \sim \left[\sqrt{2P_1 + 2P_2 - 4 \cos i_2 \sqrt{P_1 P_2}} - \sqrt{\frac{P_1}{2}} - \sqrt{\frac{P_2}{2}} \right] \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi^2 \sqrt{\mu}}{2 T^2}}$$

la perte est donc d'ordre $T^{-2/3}$ c'est-à-dire d'ordre $\frac{1}{A}$, elle décroît assez rapidement quand T augmente.

On peut vérifier sur la figure 25 (II,6.3) que les cas des transferts optimaux "par l'infini" correspondent bien à $\delta C_2 \geq 0$; $\delta C_2 = 0$ correspond à la courbe limite $E K J B$.

Si les deux orbites données ne sont pas coaxiales directes le problème du transfert optimal compte-tenu de la durée T est beaucoup plus compliqué et la perte est beaucoup plus importante, elle est d'ordre $(T^{-1/3})$ au lieu de $T^{-2/3}$, à cause de la nécessité d'utiliser un grand cercle ou une grande ellipse intermédiaire à grande distance.

Pour donner un exemple précisons qu'aux limites de la sphère d'attraction de la terre, vers $r = 250 R$, la vitesse circulaire est encore de l'ordre de 500 m/s alors que la vitesse d'apogée d'une orbite de périégée voisin du sol n'est que de 50 m/s aussi entre orbites non coaxiales directes les transferts optimaux "par l'infini" et les solutions réalisables qui s'en rapprochent offrent en général peu d'intérêt, cela est particulièrement net dans le cas des orbites coplanaires ainsi que nous allons le voir :

2^e Cas : La durée T est de l'ordre de quelques tours d'orbite.

Nous n'étudierons ici que le cas des orbites coplanaires.

Posons
$$k = \frac{\max [A_1, A_2]}{\min [P_1, P_2]} ; (k \gg 1)$$

Nous savons déjà que (III,3.4), pour une durée T illimitée :

Si $k \leq 21$ le transfert optimal n'est pas à trois impulsions.

Si $k \leq 3,3041$ le transfert optimal est à une ou deux impulsions.

Donc pour $3,3041 < k \leq 15,582$ le transfert optimal peut être à une ou deux impulsions ou bien "par l'infini", recherchons alors dans ce dernier cas les solutions optimales pour T de l'ordre de quelques tours d'orbite.

On peut démontrer que si j est choisi tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{2k}} + \frac{k-1}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2j}} + \frac{j-1}{\sqrt{j(j+1)}}$$

avec $3,3041 < k \leq 15,582 \leq j$ (j décroît de ∞ à 15,582 si k croît de 3,3041 à 15,582).

Le transfert à une ou deux impulsions le moins coûteux (appelé transfert optimal proche) est d'une vitesse caractéristique inférieure à tout transfert ne comportant pas d'impulsion ou de poussée continue au-delà de la distance $j \cdot \min [P_1, P_2]$ (le cas limite est obtenu lorsque les orbites données sont égales et coaxiales inverses). Si donc j est suffisamment grand le transfert "optimal proche" est optimal pour T de l'ordre de quelques tours d'orbite.

Voici j en fonction de k :

$k =$	$j =$
3,3041	$+\infty$
3,5	7.630
4	713
5	160

7		53
10		26,87
11,5		22,1
15,582		15,582 = racine de $j^3 = 15 j^2 + 9 j + 1$.

Le transfert "optimal proche" est le transfert de HOHMANN si les orbites coplanaires données sont coaxiales directes ($\varpi_2 = 0$); c'est le transfert "par les périgées" ou "par les apogées" si elles sont coaxiales inverses ($\varpi_2 = 180^\circ$); c'est le transfert "à deux impulsions symétriques" si elles sont égales; dans tous les cas il est localement optimal et respecte donc les conditions d'angles utiles, de commutations et de sens de commutations définies en III,2. ; les transferts "optimaux proches" forment le prolongement analytique naturel des transferts optimaux à une ou deux impulsions.

Ainsi en pratique, c'est-à-dire par exemple pour $k \leq 10$, la solution à retenir pour le transfert entre orbites coplanaires est toujours à une ou deux impulsions (soit le transfert optimal ordinaire, soit simplement le transfert "optimal proche"). Le mode optimal de transfert est :

1°) $\mathcal{A}\mathcal{A}$ (ou $\mathcal{F}\mathcal{F}$) si les orbites données sont non sécantes ou "croisées peu sécantes" (à l'exception du cas des orbites tangentes et coaxiales).

2°) $\mathcal{A}\mathcal{F}$ si les orbites données sont "embrassées" ou "croisées, avec $|\varpi_2| \geq \varpi_H$ ".

3°) à déterminer au point d'intersection le plus bas si les orbites données sont "croisées" avec $\varpi_\alpha < |\varpi_2| < \varpi_H$.

Afin de bien comprendre les différences pratiques qu'il y a dans la notion de transferts "par l'infini" pour les orbites coplanaires et pour les orbites coaxiales directes nous allons examiner les deux cas extrêmes suivants :

1°) Transferts entre cercles égaux dont l'angle des plans est de 90°

$$(a_1 = a_2 ; e_1 = e_2 = 0 ; i_2 = 90^\circ)$$

2°) Transferts entre ellipses coplanaires, égales, coaxiales inverses, telles que le rapport k soit 10.

$$(A_1 = A_2 = 10 P_1 = 10 P_2 ; i_2 = 0^\circ ; \varpi_2 = 180^\circ).$$

Nous prendrons pour unité de distance $\min[P_1; P_2]$; pour unité de coût, le coût du transfert "optimal proche" à une ou deux impulsions ($C_2 = \sqrt{2\mu/a_1}$ dans le premier cas : transfert à une impulsion en l'un des nœuds.

$$C_2 = 2 \left[\sqrt{\frac{\mu}{A_1}} - \sqrt{\frac{\mu P_1}{a_1 A_1}} \right] \text{ dans le second cas : transfert "par les apogées"}, \text{ enfin}$$

nous prendrons pour indice d'éloignement (indice qui tend vers l'infini si l'on tend vers le transfert "par l'infini") non le temps de transfert, paramètre malcommode, mais la distance $j \min[P_1, P_2]$ de l'impulsion la plus éloignée (les transferts sont optimisés en fonction de ce paramètre).

On obtient alors :

1^{er} Cas : cas coaxial direct : $a_1 = a_2 ; e_1 = e_2 = 0 ; i_2 = 90^\circ$

C proche = 1 (par définition),

$$C_\infty = 2 - \sqrt{2} = 0,5858,$$

$$C(j=8) = 0,6356.$$

Un éloignement modéré ($j = 8$) permet une économie considérable, proche de celle obtenue pour le cas du transfert "par l'infini".

2^e Cas : Cas coplanaire : $A_1 = A_2 = 10 P_1 = 10 P_2 ; i_2 = 0^\circ ; \varpi_2 = 180^\circ$.

C proche = 1 (par définition),

$$C_\infty = 0,363 : \text{le transfert "par l'infini",}$$

permet donc, dans ce cas extrême, une économie considérable par rapport au transfert "optimal proche".

Mais malheureusement :

$$C(j = 26, 87) = 1 \quad (26,87 \text{ correspond à } 10 \text{ dans le tableau de } j(k)).$$

$$C(j = 136) = \frac{3}{4}$$

$$C(j = 246) = \frac{2}{3}$$

$$C(j = 1442) = \frac{1}{2}$$

Dans ce dernier cas donc un éloignement considérable ne permet pas une économie très importante, économie toujours beaucoup plus faible que celle obtenue théoriquement dans le transfert "par l'infini".



IV - QUATRIÈME PARTIE

TRANSFERTS OPTIMAUX ENTRE ORBITES ELLIPTIQUES QUELCONQUES

Ainsi que nous l'avons vu dans la deuxième partie le problème du transfert optimal entre orbites quelconques est très compliqué; les paramètres d'état sont au nombre de six (les cinq éléments orbitaux et la consommation C) et il y a trois paramètres de commande; cependant les résultats obtenus dans les chapitres précédents permettent de donner déjà les précisions suivantes :

Soit un transfert défini par :

une orbite initiale O_1 : $a_1, e_1, i_1 = 0, \Omega_1 = 0, \varpi_1 = 0$

une orbite finale O_2 : $a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \varpi_2 \quad (0^\circ \leq i_2 \leq 180^\circ)$

Soit C_2 la vitesse caractéristique minimale nécessaire à la réalisation de ce transfert.

Soit ψ_2 l'angle des directions de périégée des orbites O_1 et O_2 :

$$\psi_2 = \text{Arc cos} \left[\cos \varpi_2 + (1 - \cos i_2) \sin \Omega_2 \sin (\varpi_2 - \Omega_2) \right]$$

Nous savons déjà (II,5) qu'à a_1, e_1, a_2, e_2, i_2 fixés c'est entre orbites coaxiales directes (donc pour $\varpi_2 = 0^\circ$; $\Omega_2 = 0^\circ$ ou 180°), que le transfert optimal est le moins coûteux; nous définissons ainsi un transfert coaxial direct correspondant au transfert donné et de coût C_{CD} .

Nous savons aussi (III,1) qu'à $a_1, e_1, a_2, e_2, \psi_2$ fixés c'est entre orbites coplanaires (donc pour $i_2 = 0^\circ$; Ω_2 quelconque; $\varpi_2 = \pm \psi_2$) que le transfert optimal est le moins coûteux; nous définissons ainsi un transfert coplanaire correspondant au transfert donné et de coût C_{CP} .

Enfin les transferts "par l'infini" étant d'un coût indépendant de l'orientation nous pouvons écrire dans tous les cas :

$$\max [C_{CD}; C_{CP}] \leq C_2 \leq C_\infty$$

Donc si le transfert coaxial direct correspondant ou bien si le transfert coplanaire correspondant est optimal "par l'infini" il en est de même du transfert considéré.

En particulier si : $i_2 \geq 60^\circ, 1850$

$$\text{ou bien si : } \max \left[\frac{P_1}{P_2}; \frac{P_2}{P_1} \right] \geq 11,938$$

$$\text{ou encore si : } \frac{8}{9} (\sqrt{2} - 1) (1 - \cos \psi_2) \geq \min \left[\frac{1 - e_1}{e_2}; \frac{1 - e_2}{e_1} \right]$$

le transfert donné est optimal "par l'infini".

Un grand nombre de cas sont ainsi résolus mais les cas intéressants (orbites O_1 et O_2 peu différentes) ne le sont évidemment pas.

REMARQUE :

Considérons l'ensemble des orbites elliptiques non sécantes à une planète donnée de rayon .
de :

$$\max [C_{CD}; C_{CP}] \leq C_2 \leq C_\infty$$

on déduit :

Le transfert optimal le plus onéreux entre les orbites elliptiques considérées est obtenu pour :

$$A_1 = P_1 = A_2 = P_2 = R \quad i_2 \gg 60^\circ, 1850$$

(donc $e_1 = e_2 = 0$: on est dans un cas "coaxial direct").

Dans ce cas :

$$C_2 = 2 \sqrt{\frac{\mu}{R}} (\sqrt{2} - 1)$$

= 6,550 km/s dans le cas de la terre.

Donc, même pour des orbites elliptiques non coplanaires, le prix d'un transfert est nettement plus faible que celui d'une montée en orbite.

Les solutions optimales sont connues dans un certain nombre d'autres cas :

1°) Si les orbites données sont quasi-circulaires et infiniment proches (MAREC [4] , EDELBAUM [5], BREAKWELL [6]).

2°) Si les orbites données sont coaxiales inverses (étude de BYRON WYNN [7]).

Ces études font apparaître des solutions toujours impulsionsnelles ne comportant jamais plus de trois impulsions non infiniment petites.

On peut démontrer [8] que si la durée de transfert est indifférente les transferts optimaux entre orbites elliptiques sont toujours composés d'impulsions et ne comportent jamais d'arcs de poussée continue; quel est le nombre maximum d'impulsions pour un transfert optimal ? il est probable qu'il n'y en a jamais plus de 3 ou 4.

Nous allons simplement donner des indications sur les "angles spatiaux utiles", généralisation des angles utiles obtenus dans le cas des orbites coplanaires, puis nous résoudrons un cas simple : Etude du transfert optimal dans le cas où les excentricités e_1 et e_2 sont proches de 1.

IV.1. INDICATIONS SUR LES "ANGLES SPATIAUX UTILES".

Les "angles spatiaux utiles" forment la généralisation des angles utiles obtenus dans le cas des orbites coplanaires; ils ont la même définition : une direction de poussée hors de l'angle spatial utile local est obligatoirement non optimale; une direction de poussée dans l'angle spatial utile local peut être optimale pour un transfert bien choisi à partir de l'orbite étudiée.

Les angles spatiaux utiles ne dépendent que de l'excentricité de l'orbite étudiée et de la position le long de cette orbite, ils sont toujours symétriques par rapport au plan d'orbite et à la normale à ce plan.

Si $e = 0$ l'angle spatial utile est formé des deux dièdres aigus limités par les plans passant par la tangente locale et inclinés de $\pm 30^\circ$ sur le plan horizontal local [4] autrement dit une direction optimale doit vérifier :

$$|S_1| \sqrt{3} \leq |W_1|$$

Si $e \simeq 1$ l'angle spatial utile se réduit à :

1°) au périgée : la tangente ($S_1 = W_1 = 0$; $T_1 = \pm 1$)

2°) Dans la moitié haute de l'orbite : les directions horizontales ($S_1 = 0$); entre le périgée et les sommets du petit axe s'étendent deux arcs purement balistiques sans aucune direction utile (comme dans le cas des transferts entre orbites coplanaires).

Si e est quelconque le résultat est évidemment beaucoup plus compliqué, récrivons alors les équations du problème (chapitre II,2).

1°) S_1, T_1, W_1 : cosinus directeurs de la direction de poussée (S_1 : radial, positif vers le haut; T_1 : horizontal, positif vers l'avant; W_1 : normal au plan d'orbite, positif dans le sens $\vec{H}$).

$$2^\circ) \quad \frac{da}{dC} = \frac{2a}{nb} \left[S_1 e \sin v + T_1 (1 + e \cos v) \right]$$

$$\frac{de}{dC} = \frac{b}{na^2} \left[S_1 \sin v + T_1 (\cos v + \cos E) \right]$$

$$\frac{di}{dC} = \frac{W_1 r \cos u}{H}$$

$$\frac{d\Omega}{dC} = \frac{W_1 r \sin u}{H \sin i}$$

$$\frac{d\varpi}{dC} = (1 - \cos i) \frac{d\Omega}{dC} + \frac{H}{\mu e} \left[-S_1 \cos v + T_1 \left(\sin v + \frac{a}{b} \sin E \right) \right]$$

On peut remplacer ces cinq équations différentielles assez compliquées par des équations vectorielles équivalentes et beaucoup plus simples :

$\vec{H}$ est le moment cinétique de l'engin étudié (par unité de masse), si donc nous considérons une impulsion élémentaire $d\vec{C}$, de coût dC on obtient :

$$d\vec{H} = \vec{r} \wedge d\vec{C}.$$

D'autre part, si l'on pose $\vec{\mathcal{P}} = \vec{V} \wedge \vec{H} - \mu \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{\mathcal{P}}$ "vecteur périégée" est une intégrale première classique du mouvement non perturbé (c'est un vecteur de longueur μe dirigé vers le périégée), on obtient alors de même :

$$d\vec{\mathcal{P}} = d\vec{C} \wedge \vec{H} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{C})$$

$\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ étant suffisants pour déterminer l'orbite, $d\vec{H}$ et $d\vec{\mathcal{P}}$ sont suffisants pour déterminer l'influence d'une impulsion élémentaire $d\vec{C}$, $d\vec{H}$ et $d\vec{\mathcal{P}}$ sont donc équivalents aux cinq équations

$\frac{da}{dC}$ à $\frac{d\varpi}{dC}$ ci-dessus.

Il est commode, pour exprimer $d\vec{H}$ et $d\vec{\mathcal{P}}$, de décomposer $d\vec{C}$ selon les axes obliques suivants :

$$d\vec{C} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\delta}$$

avec :

$\vec{\alpha}$ = composante tangentielle,

$\vec{\beta}$ = composante radiale,

$\vec{\delta}$ = composante normale au plan d'orbite (fig. 78).

d'où :

$$d\vec{H} = \vec{r} \wedge d\vec{C} = \vec{r} \wedge (\vec{\alpha} + \vec{\delta})$$

$$d\vec{\mathcal{P}} = (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \wedge \vec{H} - \vec{\delta} n a^2 e \sin E$$

on vérifie que :

$$\vec{H} \cdot d\vec{\mathcal{P}} + \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{H} = 0$$

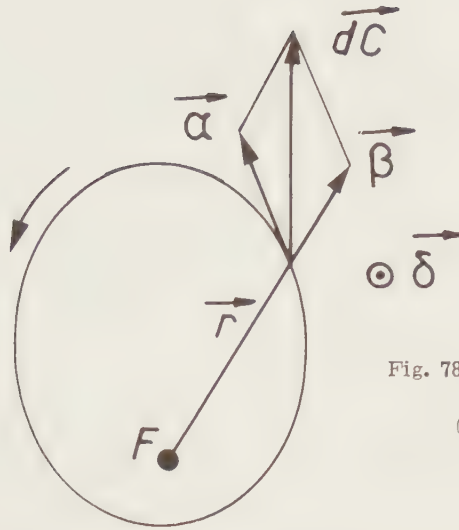


Fig. 78 - Les composantes $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ et $\vec{\delta}$.

(Components $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ and $\vec{\delta}$)

L'influence d'une impulsion élémentaire $d\vec{C}$ est donc parfaitement caractérisée par les deux vecteurs :

$$d\vec{H} = \vec{r} \wedge d\vec{C} \quad \text{et} \quad \vec{J} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

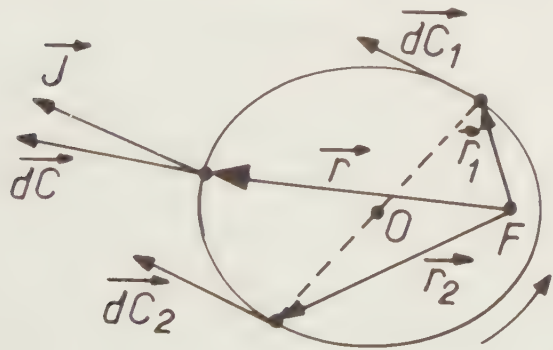
linéairement liés à $d\vec{H}$ et $d\vec{\mathcal{P}}$

L'analyse de "l'angle spatial utile" en un point de l'orbite revient à examiner si les impulsions $d\vec{C}$ en ce point peuvent ou non être remplacées par une ou plusieurs impulsions en d'autres points de l'orbite de coût (c'est-à-dire de longueur) total inférieur ou égal.

Voici quelques cas simples :

1^{er} Cas : Remplacement d'une impulsion dans le plan d'orbite par deux impulsions tangentielles parallèles et de même sens en des points diamétralement opposés (fig. 79).

On doit avoir :



or
donc

$$d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$\vec{J}_1 = 2d\vec{C}_1, \quad \vec{J}_2 = 2d\vec{C}_2$$

$$\vec{J} = 2(d\vec{C}_1 + d\vec{C}_2).$$

Cette dernière équation fixe la position de $d\vec{C}_1$ et $d\vec{C}_2$ (en les points où la tangente est parallèle à $\vec{J}$) et le coût du remplacement (égal à $\frac{J}{2}$)

Fig. 79 - Remplacement de $d\vec{C}$ par $d\vec{C}_1$ et $d\vec{C}_2$

(Replacement of $d\vec{C}$ by $d\vec{C}_1$ and $d\vec{C}_2$)

$$d\vec{H} = \vec{r} \wedge d\vec{C} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{J}.$$

Il faut donc :

$$\frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{J} = d\vec{H} = d\vec{H}_1 + d\vec{H}_2 = \vec{r}_1 \wedge d\vec{C}_1 + \vec{r}_2 \wedge d\vec{C}_2$$

avec :

$$\frac{J}{2} = d\vec{C}_1 + d\vec{C}_2$$

ce qui est toujours possible $\vec{dC}_1$ et $\vec{dC}_2$ étant parallèles à $\vec{J}$ et de même sens (le partage de $\vec{J}/2$ entre $\vec{dC}_1$ et $\vec{dC}_2$ dépendant de $\vec{r}$). On peut donc toujours remplacer une impulsion dans le plan d'orbite par deux impulsions tangentielles parallèles et de même sens en des points diamétralement opposés (par rapport au centre de l'orbite), les impulsions de remplacement coûtent $J/2$, le remplacement est donc avantageux chaque fois que $J/2 < dC$.

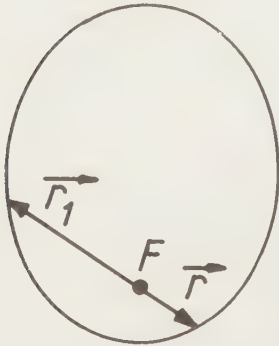


Fig. 80 - Points diamétralement opposés par rapport au foyer.

(Points diametrically opposed with respect to the focus)

2^e Cas : Remplacement d'une impulsion dans le plan $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ par une impulsion dans le même plan au point de l'orbite diamétralement opposé par rapport au foyer (fig. 80). On doit avoir :

$$\vec{dH} = \vec{dH}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{r}_1 \wedge \vec{\delta} = \vec{r}_1 \wedge \vec{\delta}_1$$

$$\text{et} \quad \vec{J} = \vec{J}_1 \quad \text{soit} \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}_1$$

Le remplacement est toujours possible, il n'est avantageux que si $r_1 > r$, on obtient :

$$\vec{\delta}_1 = -\vec{\delta} \frac{1 - e \cos v}{1 + e \cos v}$$

3^e Cas : Remplacement d'une impulsion dans le plan $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ par deux impulsions dans les plans $\vec{\beta}_1$, $\vec{\delta}_1$ locaux aux deux sommets du petit axe (fig. 81).

Ce remplacement n'a d'intérêt que si $-e < \cos v < +e$

Il faut :

$$\vec{dH} = \vec{r} \wedge \vec{dC} = \vec{dH}_1 + \vec{dH}_2 = \vec{r}_1 \wedge \vec{\delta}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{\delta}_2$$

et

$$\vec{J} = \vec{\beta} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$$

donc

$$1^\circ) \vec{r} \wedge \vec{\delta} = \vec{r}_1 \wedge \vec{\delta}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{\delta}_2$$

$$2^\circ) \vec{r} \wedge \vec{\beta} \left| \frac{r_1}{r} \right| = \vec{r}_1 \wedge \vec{\beta}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{\beta}_2$$

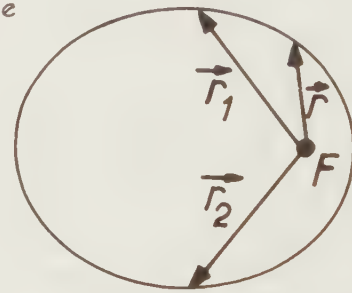


Fig. 81 - Utilisation d'impulsions aux deux sommets du petit axe.

(Utilization of impulses at the two extremities of the minor axis)

ces deux équations déterminent $\vec{dC}_1$ et $\vec{dC}_2$ et si $-e \leq \cos v \leq +e$ le coût $dC_1 + dC_2$ est égal à celui d'un vecteur de composantes $\delta \sin E$ et $\frac{\beta \sin v}{\sqrt{1-e^2}}$ ce qui est avantageux si $|\vec{\delta}|$ est grand devant $|\vec{\beta}|$.

4^e Cas : Utilisation générale des résultats obtenus dans les trois premiers cas.

Cherchons, en un point M de l'orbite les vecteurs $\vec{dC}$ de coût unitaire ou remplaçable par des vecteurs $\vec{dC}_1$, $\vec{dC}_2$, etc... de coût total unitaire.

Les vecteurs $\vec{dC}$ de coût unitaire ont leur extrémité sur la sphère de rayon 1. Le premier cas nous indique que les vecteurs $\vec{dC}$ du plan d'orbite tels que $J = 2$ sont remplaçables par deux vecteurs $\vec{dC}_1$ et $\vec{dC}_2$ de coût total unitaire. L'extrémité de ces vecteurs pour lesquels $J = 2$, a pour lieu l'ellipse E_1 (fig. 82) déduite du cercle de rayon 1 par l'affinité d'axe $\vec{MV}$ de direction $\vec{FM}$ et de rapport 2.

Le second cas nous permet de définir de manière analogue l'ellipse E_2 du plan $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ (fig. 83) de centre M et d'axes $B_2 B'_2$ ($MB_2 = 1$) et $D_2 D'_2$ ($MD_2 = \frac{1+e \cos v}{1-e \cos v}$), de même le troisième cas

conduit à l'ellipse E_3 (à condition que $-e \leq \cos v \leq +e$) ellipse de centre M (fig. 83) et d'axes

$$B_3 B'_3 \left(MB_3 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sin v} \leq 1 \right.$$

et

$$D_3 D'_3 \left(MD_3 = \frac{1}{\sin E} \gg \frac{1+e \cos v}{1-e \cos v} = MD_2 \right).$$

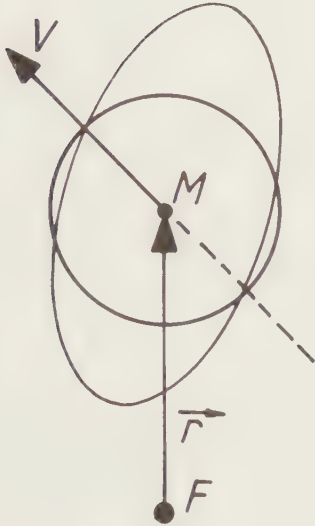


Fig. 82 - Ellipse E_1 .

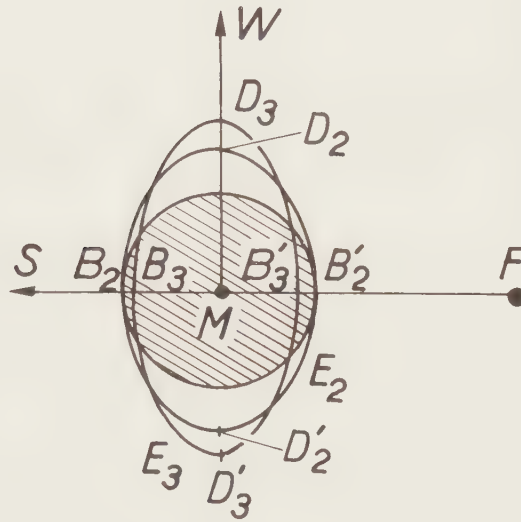


Fig. 83 - Ellipses E_2 et E_3 .

Construisons sur une même figure (fig. 84) la sphère unitaire et les ellipses E_1 , E_2 , E_3 . Si en un point de la sphère unitaire le plan tangent coupe l'une des ellipses E_1 , E_2 , ou E_3 (cette dernière seulement si $-e \leq \cos v \leq +e$) le vecteur $d\vec{C}$ correspondant n'est pas dans "l'angle spatial utile local" il est en effet remplaçable par des vecteurs infiniment voisins et d'autres relatifs à l'ellipse coupée de coût total inférieur à 1 (la propriété réciproque n'est pas vraie) on voit ainsi qu'au moins 65% de la sphère unitaire correspondent à des directions inutiles.

- E_1 intervient toujours,
- E_2 intervient seulement si $\cos v > 0$
- E_3 intervient seulement si $|\cos v| \leq e$

En particulier E_1 passant par les points $\vec{\alpha} = \vec{\delta} = 0$, $\vec{\beta} = \pm 2$ les directions à plus de 30° du plan horizontal local ne sont jamais optimales.

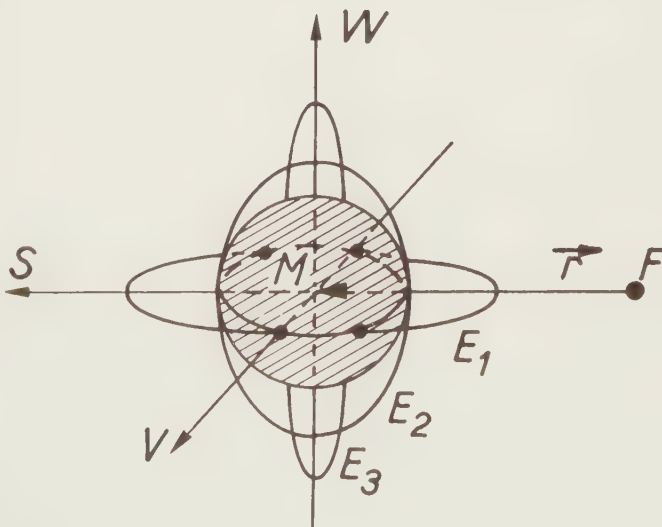


Fig. 84 - Disposition spatiale des ellipses E_1 , E_2 et E_3 .
(Space disposition of the ellipses E_1 , E_2 and E_3)

Voici, sans démonstrations, quelques autres résultats sur les "angles spatiaux utiles" dans le cas où $e \neq 0$ et $e \neq 1$ (Nous étudierons seulement les cas où $\sin \nu \geq 0$, ceux $\sin \nu < 0$ étant symétriques (ν en $-\nu$ et S_1 en $-S_1$)).

1°) ANGLE SPATIAL UTILE AU PÉRIGÉE.

L'angle spatial utile découpe sur la sphère de rayon 1 deux "huits" symétriques par rapport aux trois axes et au centre de la sphère (fig. 85).

En $\mathcal{D}$, au "sommet" du "huit" :

$$S_1 = 0; \quad T_1 = \frac{2\sqrt{e}}{1+e}; \quad W_1 = \frac{1-e}{1+e}.$$

Au voisinage du point double du "huit" :

$$\frac{S_1^2}{W_1^2} \simeq \rho^2 = \frac{2(1-e^2)^2(1-k)^2 - (1+x)(2-e+x) [(1+e)k-1]^2}{(1-e)(1+x)(e-x) [(1+e)k+1]^2}$$

avec

$$k = \frac{x^2 + x(3-e) + 2e - e^3}{x^2(1+e) + x(3-e)(1+e) + 4e - e^2 - e^3}$$

et x = racine de :

$$2x^3 + x^2(9-5e) + x(12-14e+4e^2) + 2e^3 \frac{1-e}{1+e} = 0$$

(pour $e \simeq 0$; $\rho^2 = \frac{1}{3} - \frac{2e^2}{9}$ + ordre e^3 , l'angle spatial utile est très proche des deux dièdres aigus

($3S_1^2 \leq W_1^2$) obtenus pour $e = 0$).

Pour $e \simeq 1$: $\rho^2 \simeq \frac{1-e^2}{4}$; $\mathcal{D}$ tend vers le point $T_1 = 1$; $W_1 = S_1 = 0$, les "huits" sont tout petits et tendent vers la tangente quand $e \rightarrow 1$).

2°) ANGLE SPATIAL UTILE AU VOISINAGE DU PÉRIGÉE (fig. 86).

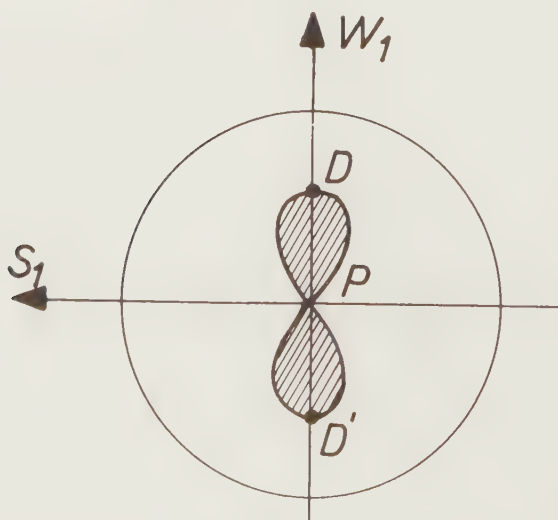


Fig. 85 - Angle spatial utile au périgée.
(Space useful-angle at the perigee)

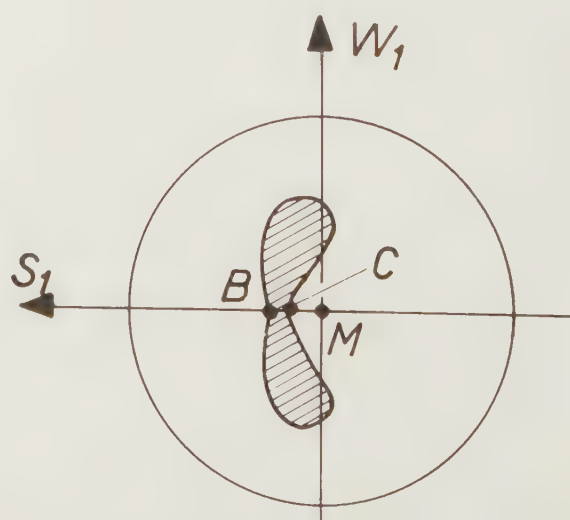


Fig. 86 - Angle spatial utile au voisinage du périgée.
(Space useful-angle near the perigee)

Les "huits" sont un peu déformés, les points B et C correspondent aux angles φ_s et φ_i du cas coplanaire. (Le second "huit" est symétrique du premier par rapport au point M ou à l'axe MW_1).

Les points B et C sont anguleux, on obtient pour la limite de la zone utile :

$$\text{au voisinage de } B : S_1 - S_{1B} \sim \left| W_1 \right| \frac{e \sqrt{(3+e)(1-e)}}{4+e-e^2}$$

$$\text{au voisinage de } C : S_{1C} - S_1 \sim \left| W_1 \right| \sqrt{\frac{1-e}{3+e}}$$

3°) ANGLE SPATIAL UTILE AU VOISINAGE DES SOMMETS DU PETIT AXE.

Pour $\cos E \approx 0$ les deux zones utiles ne sont séparées que par un étroit couloir (fig. 87) défini par l'inéquation :

$$\left| T_1 (2 - e^2) + S_1 e \sqrt{1 - e^2} \right| < 2 \sqrt{e \cos E (4 - 3e^2)}$$

(au voisinage des points $S_1 = T_1 = 0$; $W_1 = \pm 1$).

Pour $\cos E \leq 0$ la zone utile devient d'un seul tenant.

4°) ANGLE SPATIAL UTILE AU VOISINAGE DE L'APOGÉE (fig. 88).

Les points anguleux B et C correspondent aux angles φ_s et φ_i du cas coplanaire

$$\text{au voisinage de } B : S_1 - S_{1B} \sim \left| W_1 \right| \frac{e \sqrt{(1-e)(3+e)}}{4-e-e^2}$$

$$\text{au voisinage de } C : S_{1C} - S_1 \sim \left| W_1 \right| \frac{\sqrt{(1-e)(3+e)}}{3-e}$$

il y a deux points anguleux de part et d'autre de B près du prolongement des courbes issues de C .

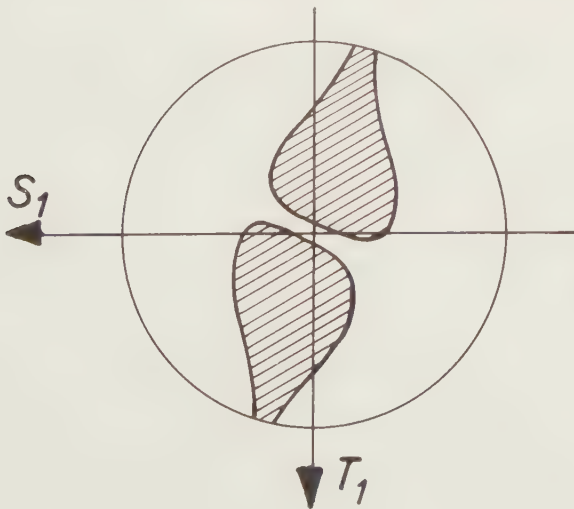


Fig. 87 - Angle spatial utile au voisinage de l'un des sommets du petit axe.

(Space useful-angle near an extremity of the minor axis)

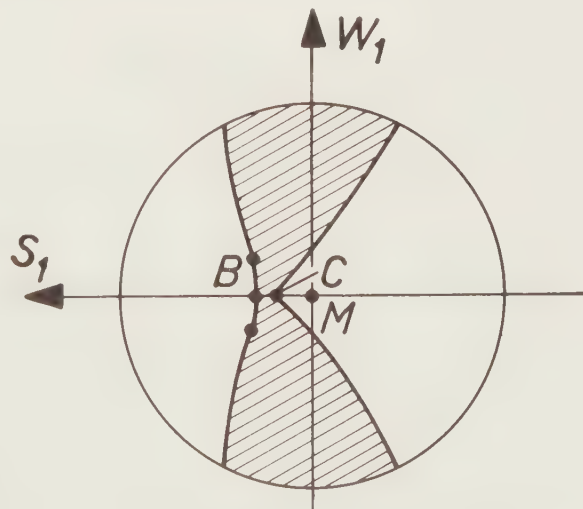


Fig. 88 - Angle spatial utile au voisinage de l'apogée.

(Space useful-angle near the apogee)

5°) ANGLE SPATIAL UTILE A L'APOGÉE (fig. 89).

La zone utile est symétrique par rapport aux trois axes et au centre de la sphère unitaire, elle a deux points doubles sur la tangente locale; au voisinage de ces points doubles S_1 / W_1 est équivalent à

$$\pm \frac{\sqrt{(1-e)(3+e)}}{3-e}$$

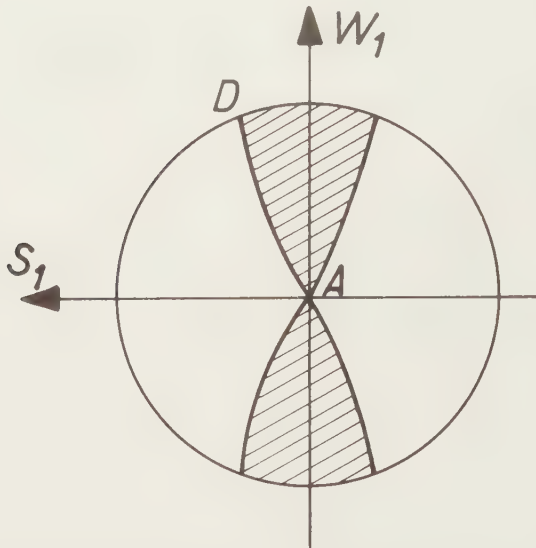


Fig. 89 - Angle spatial utile à l'apogée.

(Space useful-angle at the apogee)

Le point D obtenu pour $T_1 = 0$ est tel que

$$\frac{S_1^2}{W_1^2} = \min_{0 \leq x \leq 1} \text{ de : } \frac{(1-e)(1+ex)(1+2e+x)}{(1+e)(1+x)(3+ex-2e^2)}$$

(si $e \geq \frac{1}{2}$ le minimum est obtenu pour $x = 1$ et vaut $\frac{1-e}{3-2e}$)

(si $e \approx 0$ le minimum vaut $\frac{1}{3} - \frac{e}{9}(8 - 4\sqrt{3}) + \text{ordre } e^2$).

Voici, pour terminer cette étude sur les angles spatiaux utiles, la condition d'optimalité locale déjà exprimée en III,2. dans le cas coplanaire (et que nous démontrerons dans la cinquième partie).

Si α est l'angle du vecteur vitesse et de la direction de poussée (direction dont les cosinus directeurs sont S_1, T_1, W_1) la condition d'optimalité locale s'écrit :

$$\sin \alpha \cdot \sqrt{1+e \cos E} \cdot \sqrt{1-3S_1^2} > |S_1|$$

cette condition est évidemment une condition nécessaire d'optimalité globale, c'est elle qui donne la limite de l'angle utile dans certains cas par exemple à l'apogée au voisinage du point D (fig. 89) pour $e \geq \frac{1}{2}$.

REMARQUE : L'angle utile spatial est en général beaucoup plus ouvert que l'angle utile plan, d'autre part les commutations ne se produisent pas seulement lorsque la direction de poussée coïncide avec l'un des bords de l'angle utile comme cela se produit dans le cas coplanaire aussi cette notion a-t-elle beaucoup moins d'intérêt dans le cas général.

IV,2. ÉTUDE DU TRANSFERT OPTIMAL DANS LE CAS OU LES EXCENTRICITÉS SONT PROCHES DE 1.

ψ_2 étant l'angle des directions de périégée nous savons déjà (chapitre IV) que si :

$$\frac{8}{9} (\sqrt{2}-1)(1-\cos \psi_2) \geq \min \left[\frac{1-e_1}{e_2}, \frac{1-e_2}{e_1} \right]$$

le transfert optimal est "par l'infini", nous ne ferons donc l'étude que dans le cas non déterminé qui est ici, puisque $e_1 \approx 1$ et $e_2 \approx 1$:

$$\psi_2 \leq \frac{3}{2} \sqrt{\sqrt{2}+1} \cdot \min [\sqrt{1-e_1}, \sqrt{1-e_2}]$$

ψ_2 reste donc toujours très petit dans les cas de transferts optimaux "finis".

Nous ferons l'étude en utilisant les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ déjà rencontrés au chapitre précédent :

$$\vec{H} = \vec{r} \wedge \vec{V} = \text{vecteur moment cinétique,}$$

$\vec{\mathcal{P}} = \vec{V} \wedge \vec{H} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = \text{"vecteur périgée"} = \text{vecteur de longueur}$
dirigé vers le périgée.

$$\begin{aligned} d\vec{H} &= \vec{r} \wedge d\vec{C} \\ d\vec{\mathcal{P}} &= d\vec{C} \wedge \vec{H} + \vec{V} \wedge (\vec{r} \wedge d\vec{C}). \end{aligned}$$

Nous savons que la direction de $\vec{\mathcal{P}}$ varie peu puisque ψ_2 est petit, nous ne retiendrons, pour décrire les variations de l'orbite, que les variations de $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ perpendiculaires à $\vec{\mathcal{P}}$ (ce sont d'ailleurs celles qui sont les plus importantes), nous les appellerons respectivement $d\vec{H}'$ et $d\vec{\mathcal{P}}'$; comme il faut cinq paramètres indépendants pour décrire les variations de l'orbite nous prendrons le demi-grand axe a pour cinquième paramètre, si alors on pose :

$$\vec{a} = \text{vecteur de longueur } a \text{ dirigé vers l'apogée} = -\frac{a}{\mu e} \vec{\mathcal{P}}$$

On obtient pour partie principale des variations en fonction de $d\vec{C}$

$$\begin{aligned} d\vec{H} &\sim d\vec{H}' \sim \vec{a} \wedge d\vec{C} (1 - \cos E) \\ d\vec{\mathcal{P}} &\sim d\vec{\mathcal{P}}' \sim -d\vec{C}' \cdot \sin E \cdot \sqrt{\mu a} \text{ avec } d\vec{C}' = \text{composante de } d\vec{C} \text{ perpen-} \\ &\quad \text{diculaire à } \vec{\mathcal{P}}_1. \\ da &= \frac{2a^2}{\mu} \vec{V} \cdot d\vec{C} \end{aligned}$$

$|da|$ est donc maximum au périgée pour une poussée tangentielle et est donc pratiquement nul pour $E \neq 0^\circ$ comme d'autre part $d\vec{H}'$ et $d\vec{\mathcal{P}}'$ sont nuls pour $E = 0^\circ$ on en déduit aisément les directions utiles :

1°) Au périgée : la tangente :

$$\begin{aligned} da &= \pm \frac{4a^2}{H} dC ; \pm \text{ selon le sens de } d\vec{C} \\ d\vec{H}' &= 0 ; \quad d\vec{\mathcal{P}}' = 0 \end{aligned}$$

2°) Dans la moitié haute de l'orbite ($\cos E \leq 0$) : les directions horizontales ($\vec{\mathcal{P}}_1 \cdot d\vec{C} = 0$) :

$$\begin{aligned} da &= 0 \\ d\vec{H}' &= \vec{a} \wedge d\vec{C} (1 - \cos E) \\ d\vec{\mathcal{P}}' &= -\sin E \cdot d\vec{C} \cdot \sqrt{\mu a} \end{aligned}$$

La moitié basse (cas : $|E| < \frac{\pi}{2}$) ne convient pas car à $\sin E$ donné ($1 - \cos E$) est alors plus faible que dans le cas $\cos E \leq 0$.

On ne peut donc modifier a d'une part $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ d'autre part que successivement or $d\vec{H}'$ et $d\vec{\mathcal{P}}'$ sont des fonctions croissantes de a il y a donc intérêt à modifier $\vec{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$ lorsque a est maximal et cet intérêt l'emporte toujours, ainsi qu'il est aisé de le vérifier, sur celui qu'il y a à modifier a lorsque H est minimal, ainsi, si nous supposons $a_1 \gg a_2$ (en utilisant au besoin la réversibilité) un transfert optimal se présente de la manière suivante :

1°) Une éventuelle première impulsion tangentielle au périgée porte a de a_1 à $a_3 (> a_1)$.

2°) Une ou plusieurs impulsions dans la moitié haute de l'orbite transforment $\vec{H}_1$ en $\vec{H}_2$ et $\vec{\mathcal{P}}_1$ et $\vec{\mathcal{P}}_2$.

3°) Une dernière impulsion tangentielle freinante au périée porte a de a_3 à a_2 ($\leq a_1$).

Le coût de la première impulsion est $\frac{H_1}{4} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} \right)$ celui de la dernière est $\frac{H_2}{4} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right)$

ce sont des fonctions linéaires de $\frac{1}{a_3}$.

Si l'on avait
$$d\vec{\mathcal{P}}' = -\sin E \cdot d\vec{C} \cdot a \sqrt{\frac{\mu}{a_1}}$$

au lieu de
$$d\vec{\mathcal{P}}' = -\sin E \cdot d\vec{C} \cdot \sqrt{\mu a}$$

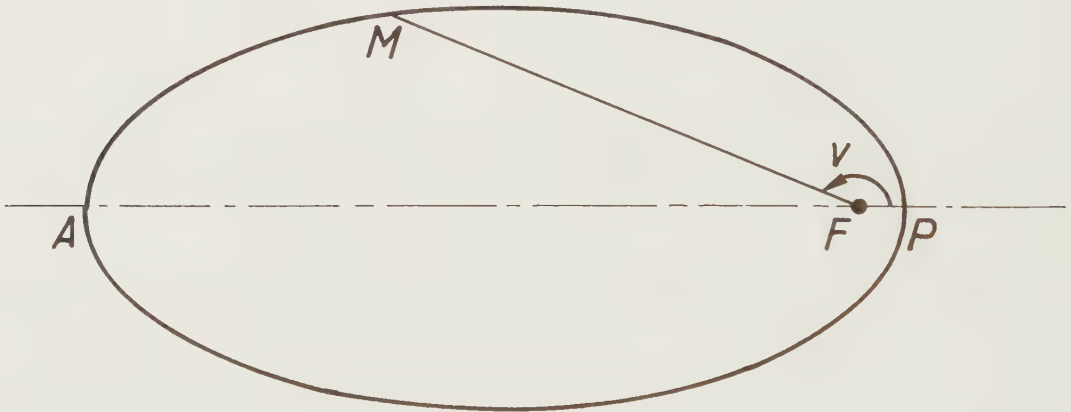
$d\vec{H}'$ et $d\vec{\mathcal{P}}'$ seraient tous les deux proportionnels à a et le coût des impulsions dans la moitié haute de l'orbite serait proportionnel à $1/a_3$; le coût total serait donc fonction linéaire de $1/a_3$ optimal pour a_3 minimum ($a_3 = a_1$) ou maximum ($a_3 = +\infty$). Mais la formule réelle est

$$d\vec{\mathcal{P}}' = -\sin E \cdot d\vec{C} \cdot \sqrt{\mu a}$$

plus défavorable que

$$d\vec{\mathcal{P}}' = -\sin E \cdot d\vec{C} \cdot \sqrt{\frac{\mu a^2}{a_1}}$$

sauf pour $a_3 = a_1$ et $a_3 = +\infty$ où les consommations sont identiques donc à fortiori, la valeur optimale de a_3 est $+\infty$ (transfert "par l'infini") ou bien a_1 .



D'où :

Pour $a_1 \geq a_2$ le transfert optimal est soit "par l'infini", de coût $C_2 \sim \frac{H_1}{4a_1} + \frac{H_2}{4a_2}$, soit avec une ou plusieurs impulsions dans la moitié haute de l'orbite, impulsions portant $\vec{H}$ de $\vec{H}_1$ à $\vec{H}_2$ et $\vec{\mathcal{P}}$ de $\vec{\mathcal{P}}_1$ à $\vec{\mathcal{P}}_2$, puis une impulsion tangentielle freinante au périée, de coût

$$dC \sim \frac{H_2}{4} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right),$$

portant a de a_1 à a_2 .

La valeur de a_2 n'intervient pas dans la comparaison des deux modes de transfert.

Il reste donc à optimiser le transfert $a_1, \vec{H}_1, \vec{\mathcal{P}}_1 \rightarrow a_1, \vec{H}_2, \vec{\mathcal{P}}_2$ dans le cas où l'on utilise seulement des impulsions horizontales dans la moitié haute de l'orbite, impulsions qui donnent les variations :

$$da \simeq 0, \text{ or } r \simeq a (1 - \cos E); (E \text{ est une constante au cours d'une impulsion}).$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{dH} &\sim \vec{dH'} \sim \vec{a}_1 \wedge \vec{dC} (1 - \cos E) \\ \vec{dP} &\sim \vec{dP'} \sim - \sin E \cdot \sqrt{\mu a_1} \cdot \vec{dC} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \vec{a}_1 \cdot \vec{dC} = 0.$$

Recherchons les commutations : pour cela il faut, selon la théorie de PONTRYAGIN [2] que la somme Σ :

$$\Sigma = \vec{p}_{H'} \cdot \frac{dH'}{dC} + \vec{p}_{P'} \cdot \frac{dP'}{dC}$$

avec $\vec{p}_{H'}$ et $\vec{p}_{P'}$ perpendiculaires à $\vec{a}_1$, ait deux maximums (en fonction de E) égaux.

$$\text{Or : } \Sigma = \frac{dC}{dC} \left[\vec{p}_{H'} \wedge \vec{a}_1 (1 - \cos E) - \vec{p}_{P'} \cdot \sin E \cdot \sqrt{\mu a_1} \right]$$

il faut donc, pour optimiser la direction de poussée prendre $d\vec{C}$ parallèle au vecteur dont l'expression est entre crochets et :

$$\Sigma^2 = a_1^2 p_{H'}^2 (1 - \cos E)^2 + \mu a_1 \sin^2 E \cdot p_{P'}^2 - 2 \vec{p}_{P'} \cdot (\vec{p}_{H'} \wedge \vec{a}_1) \sin E (1 - \cos E) \sqrt{\mu a_1}.$$

Il y a deux maximums égaux (en fonction de E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} 1^\circ) & \vec{p}_{P'} \cdot (\vec{p}_{H'} \wedge \vec{a}_1) = 0 \\ 2^\circ) & \mu a_1^2 p_{P'}^2 > 2 a_1^2 p_{H'}^2. \end{aligned}$$

Les valeurs de E correspondant aux deux maximums sont alors opposées (et sont telles que $\cos E \leq 0$).

Si donc il y a des commutations elles ne peuvent conduire au maximum qu'à deux valeurs opposées de E , la phase considérée comporte donc au plus deux impulsions qui sont alors en des points d'anomalie excentrique opposée.

Soit E_1 l'anomalie excentrique de la première impulsion, on obtient :

$$\frac{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{a}_1}{a_1^2 (1 - \cos E_1)} = \vec{dC}_1 + \vec{dC}_2 = \text{somme vectorielle des deux impulsions}$$

$$\text{et } \frac{\mathcal{P}_2' - \mathcal{P}_1'}{\sin E_1 \sqrt{\mu a_1}} = \vec{dC}_2 - \vec{dC}_1$$

d'où la première impulsion :

$$\vec{dC}_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{a}_1}{a_1^2 (1 - \cos E_1)} - \frac{\vec{\mathcal{P}}_2' - \vec{\mathcal{P}}_1'}{\sin E_1 \cdot \sqrt{\mu a_1}} \right]$$

et la deuxième impulsion (en $E_2 = -E_1$) :

$$\vec{dC}_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{a}_1}{a_1^2 (1 - \cos E_1)} + \frac{\vec{\mathcal{P}}_2' - \vec{\mathcal{P}}_1'}{\sin E_1 \cdot \sqrt{\mu a_1}} \right]$$

avec bien entendu $\vec{\mathcal{P}}_2' - \vec{\mathcal{P}}_1' =$ composante normale à $\vec{a}_1$ de $\vec{\mathcal{P}}_2 - \vec{\mathcal{P}}_1$. Le coût de cette phase du transfert est $|\vec{d}\vec{C}_1| + |\vec{d}\vec{C}_2|$ et E_1 s'obtient en minimisant cette somme, les deux valeurs E_1 et $-E_1$ donnent alors évidemment le même résultat et cette étude n'est pas suffisante pour déterminer le sens de la succession de ces deux impulsions (la précision relative de l'étude est $\max [\sqrt{1-e_1}; \sqrt{1-e_2}]$).

La figure 90 permet de calculer le coût des deux premières impulsions :

Posons :

$$\vec{K} = \frac{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{a}_1}{a_1^2} ; \vec{L} = \frac{\vec{\mathcal{P}}_2' - \vec{\mathcal{P}}_1'}{\sqrt{\mu} a_1}$$

$$\alpha = (\vec{K}, \vec{L}) \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

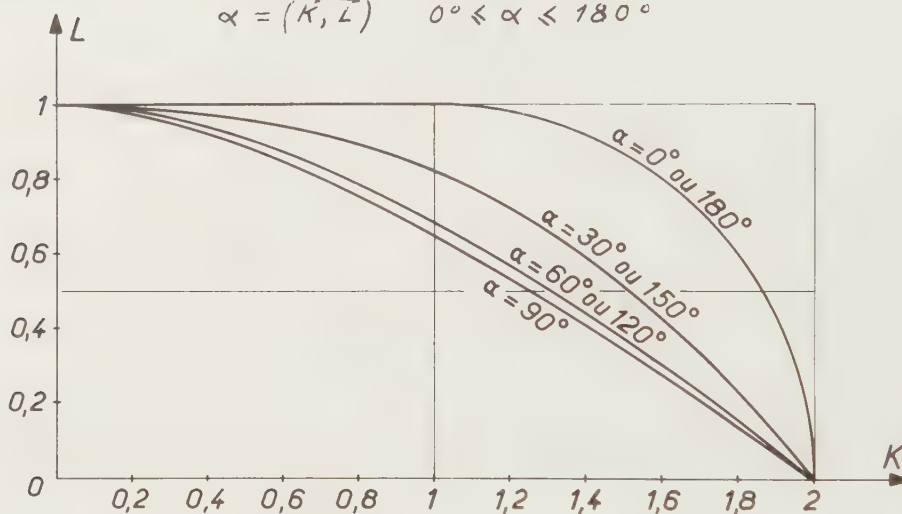


Fig. 90 - Transferts optimaux entre orbites d'excentricités voisines de 1. (cas où $a_1 \geq a_2$). Courbes de coût unitaire (impulsions hautes) pour différentes valeurs de α .

(Optimal transfers between orbits whose eccentricities are close to one (case $a_1 \geq a_2$). Unit-cost curve (upper impulses) for some values of α .)

$$\vec{K} = \frac{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{a}_1}{a_1^2}$$

$$\vec{L} = \frac{\vec{\mathcal{P}}_2 - \vec{\mathcal{P}}_1}{\sqrt{\mu} a_1} \quad L \simeq n_1 a_1 \psi_2$$

$$\alpha = (\vec{K}, \vec{L}) \quad 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Remarque : si l'on porte en abscisse $\frac{4 |\vec{H}_2 - \vec{H}_1|}{H_2 + H_1}$ au lieu de K et en ordonnée

$\frac{4 \psi_2}{\left(1 + \frac{H_2}{H_1}\right) \sqrt{1-e_1^2}}$ au lieu de L , les courbes tracées correspondent aux cas

limites entre les transferts optimaux « par l'infini » (au delà) et les transferts optimaux « finis » (en deçà).

Le coût cherché est :

$$dC_1 + dC_2 = C'_2 = \frac{1}{2} \cdot \min \text{ par rapport à } E \text{ de } \left[\left| \frac{\vec{K}}{1 - \cos E} - \frac{\vec{L}}{\sin E} \right| + \left| \frac{\vec{K}}{1 - \cos E} + \frac{\vec{L}}{\sin E} \right| \right]$$

C'_2 ne dépend que de K , L et α ; les courbes tracées pour différentes valeurs de α sont les courbes de coût unitaire en fonction de K et L ($L \sim n_1 a_1 \psi_2$).

Les équations paramétriques de ces courbes sont :

$$K = \frac{1 + x(1 - 3 \cos^2 \alpha) + x^2 \cos^2 \alpha}{1 - 2x \cos^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha} \sqrt{x}$$

$$L = \frac{(1 - x) \sqrt{1 + x(1 - 3 \cos^2 \alpha) + x^2 \cos^2 \alpha}}{1 - 2x \cos^2 \alpha + x^2 \cos^2 \alpha}$$

x variant de 0 à 1.

Si donc le transfert n'est pas "par l'infini" il est en général "à trois impulsions" de coût total :

$$C_2 = C'_2 + \frac{H_2}{4} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) + \text{ordre} \left[n_2 a_2 (1 - e_2) \right]$$

La troisième impulsion disparaît si $\alpha_2 = \alpha_1$. L'une des deux premières disparaît si $\alpha = 0^\circ$ ou 180° avec $K \geq L$.

Le transfert "par l'infini" ayant pour coût : $C_\infty = \frac{H_1}{4a_1} + \frac{H_2}{4a_2}$ la comparaison des deux modes se fait en comparant C'_2 et $\frac{H_1 + H_2}{4a_1}$, elle peut donc se faire directement sur la figure 90 à condition de porter en abscisse

$$\frac{4a_1 K}{H_1 + H_2} \sim \frac{4}{H_1 + H_2} \left| \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right|$$

au lieu de K et en ordonnée

$$\frac{4a_1 L}{H_1 + H_2} \sim \frac{4\psi_2 H_1}{(H_2 + H_1) \sqrt{1 - e_1^2}}$$

au lieu de L ; les courbes tracées pour différentes valeurs de α correspondent alors aux cas limites, l'extérieur étant la zone des transferts optimaux "par l'infini".

REMARQUE I : La limite supérieure de ψ_2 dans le cas des transferts optimaux "finis" ne dépasse pas $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{H_2}{H_1} \right) \sqrt{1 - e_1^2}$; elle reste toujours nettement inférieure au majorant $\frac{3}{2} \sqrt{\sqrt{2} + 1} \min \left[\sqrt{1 - e_1} ; \sqrt{1 - e_2} \right]$ présenté au début de l'étude, on a toujours en effet dans ces cas :

$$\psi_2 \leq \min \left[\sqrt{1 - e_1} ; \sqrt{\frac{a_2}{a_1} (1 - e_2)} \right]$$

REMARQUE II : Si L , et donc ψ_2 , sont nuls le transfert est entre orbites coaxiales directes, ce cas est le plus favorable, à $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$ données, aux transferts optimaux "finis", la limite est obtenue pour

$$\left| \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right| = \frac{1}{2} (H_2 + H_1)$$

ce qui est tout à fait conforme aux résultats obtenus dans le chapitre II,6.2.1. (transferts entre orbites coaxiales directes dont l'une est d'excentricité voisine de 1), on voit en particulier que

les paramètres i_2 et $\frac{P_2}{P_1} \left(= \left(\frac{H_2}{H_1} \right)^2 \right)$ peuvent varier beaucoup plus que ϕ_2 : i_2 peut aller jusqu'à 60° et $\frac{P_2}{P_1}$ de $\frac{1}{9}$ à 9 (voir les résultats indiqués sur la figure 20 - chapitre II, 6.2.1.).



V - CINQUIÈME PARTIE

POINT DE VUE PRATIQUE

Du point de vue pratique les résultats présentés ci-dessus attirent les remarques suivantes :

1°) Les fusées réalisables ne disposent jamais que de forces de poussée finies, on ne peut donc pas réaliser des impulsions (d'ailleurs les organismes vivants ne les supporteraient pas) il faut donc chercher comment l'on peut remplacer optimalement une impulsion par un ou des arcs de poussée et quelle est la perte qui en résulte.

2°) Quelle que soit la durée dont on dispose cette durée n'est pas infinie, aussi les transferts "par l'infini" ne peuvent être considérés que comme des cas limites dont on peut s'approcher plus ou moins en un temps limité; nous ne dirons rien de plus à ce sujet et nous nous contenterons de ce qui a été dit dans le paragraphe III,4.2.

D'autre part nous avons vu dans la première partie que le problème du rendez-vous : rejoindre un mobile donné, réel ou fictif, circulant sur une orbite donnée n'était pas plus coûteux que le transfert simple : il suffit en effet, avant de passer sur l'orbite finale d'attendre "le bon moment" sur une orbite voisine de période un peu différente ... mais cela peut prendre du temps nous rechercherons donc comment réaliser le rendez-vous le plus rapidement possible pour le même prix que le transfert simple.

3°) Nous avons supposé que l'étude était faite dans un champ newtonien central et qu'il n'y avait aucune action perturbatrice, ce n'est pas le cas dans la réalité et l'on pourra être amené à utiliser :

- a) L'action attractive de corps secondaires (passages hyperboliques au voisinage de planètes ou de gros satellites).
- b) Les freinages atmosphériques (utiles surtout lorsque l'on va d'une orbite haute vers une orbite basse ou bien lorsque l'angle des plans d'orbite est très grand).
- c) Les actions perturbatrices importantes, comme par exemple celles de l'aplatissement terrestre sur les orbites proches.

Nous ne développerons pas ces points, nous allons simplement examiner du point de vue pratique le problème du rendez-vous et celui du remplacement d'une impulsion par un ou des arcs de poussée.

V.1. SUR LE PROBLÈME DU RENDEZ-VOUS.

Soit une orbite initiale O_1 de période T_1 et une orbite finale O_2 de période T_2 .

Supposons, ce qui est le cas général, que le transfert simple optimal de O_1 à O_2 ne comporte qu'une solution unique et non deux ou plusieurs équivalentes. Le transfert simple optimal est alors de la forme suivante :

I. On quitte l'orbite O_1 en un endroit déterminé donc à l'instant t_1 ou $t_1 + K T_1$, t_1 étant déterminé et K entier (positif ou nul).

II. On effectue un certain trajet bien déterminé, les différentes orbites de ce trajet pouvant être parcourues une ou plusieurs fois.

III. On arrive sur l'orbite O_2 en un endroit bien déterminé, donc pour réaliser le rendez-vous en un instant qui devrait être t_2 ou $t_2 + k'T_2$

La solution pratique pour réaliser le rendez-vous a été proposée en [9] elle est très simple : elle consiste à attendre un ou plusieurs tours sur une orbite intermédiaire du transfert de période appropriée.

Supposons donc que le transfert simple le plus court (celui qui ne fait pas de tour supplémentaire sur une orbite) ait pour durée Δ , on ne peut arriver optimalement sur O_2 avant $t_1 + \Delta$.

Supposons d'autre part que les orbites intermédiaires du transfert aient des périodes limitées inférieurement par T_3 et supérieurement par T_4 ($T_3 \leq T_1$, $T_2 \leq T_4$), on peut choisir pour y attendre un ou plusieurs tours une orbite instantanée intermédiaire de période T_5 à notre disposition entre T_3 et T_4 (en fractionnant au besoin une impulsion).

On peut donc arriver sur l'orbite O_2 en des instants t tels que :

$$t = t_1 + \Delta$$

$$t_1 + \Delta + T_3 \leq t \leq t_1 + \Delta + T_4$$

$$t_1 + \Delta + mT_3 \leq t \leq t_1 + \Delta + mT_4$$

avec m entier positif ou nul (m = nombre de tours sur l'orbite intermédiaire de période T_5).

On veut $t = t_2 + k'T_2$, la solution est donc immédiate, si l'on recherche le rendez-vous de durée minimale la perte de temps par rapport au transfert simple est au maximum de $T_2 + m'T_3$ avec m' = plus grand entier $< T_4 / T_3 - T_3$.

REMARQUE I : Si l'on n'est pas dans un cas limite (cas pour lequel $T_5 = T_3$ ou $T_5 = T_4$) et si $m \geq 2$ on dispose d'un certain choix pour réaliser le rendez-vous : on peut "perdre des tours" sur deux ou plusieurs orbites successivement.

REMARQUE II : Si le transfert simple optimal de O_1 à O_2 admet plusieurs solutions équivalentes on dispose évidemment de plus de possibilités, par exemple entre cercles coplanaires les solutions se déduisent de l'une d'elle par rotation, il suffit dans ce cas d'attendre sur O_1 , l'instant favorable de départ (instants qui se répètent à des intervalles de temps égaux à $(T_1 T_2) / (T_2 - T_1)$ durée de la "révolution synodique").

V.2. REMPLACEMENT D'UNE IMPULSION PAR UN OU PLUSIEURS ARCS DE POUSSÉE.

Les fusées ayant obligatoirement des poussées limitées on ne peut effectuer les impulsions indiquées par les études théoriques, on est donc en pratique conduit à utiliser des arcs de poussée et à admettre une certaine perte.

On peut réduire cette perte en décomposant les impulsions à effectuer en deux ou plusieurs fractions que l'on effectue à un ou plusieurs tours d'intervalle, on peut par ce procédé s'approcher aussi près que l'on veut de l'optimum, mais en un temps infiniment long

Le problème pratique est donc : comment remplacer avec le minimum de perte une impulsion ou une fraction d'impulsion par un arc de poussée ? et quelle est la perte obtenue ?

Utilisons la théorie de PONTYAGIN [2] pour résoudre cette question dans les cas de fusée à vitesse d'éjection imposée (propulseurs chimiques, fusées nucléaires etc ...); pour ces propulseurs une étude analogue à celle faite dans la première partie montre que la vitesse caractéristique C est une fonction monotone déterminée de la consommation de masse, elle peut donc encore servir de paramètre de prix.

Nous prendrons $\vec{r}$, $\vec{v}$ et C pour variables d'état, $\vec{y}$ (vecteur accélération) pour paramètre de commande et $\vec{p}_r$, $\vec{p}_v$, p_c pour paramètres de PONTYAGIN associés à $\vec{r}$, $\vec{v}$, C .

D'où l'Hamiltonien $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \vec{p}_r \cdot \vec{V} + \vec{p}_v \cdot \left(\vec{\gamma} - \mu \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + p_c \gamma$$

La maximisation de $\mathcal{H}$ conduit à prendre $\vec{\gamma}$ parallèle à $\vec{p}_v$ (et de même sens) et à choisir :

$$1^\circ) \quad \gamma = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{p}_v| + p_c < 0$$

$$2^\circ) \quad \gamma = \gamma_{\max} \quad \text{si} \quad |\vec{p}_v| + p_c > 0$$

(γ maximum est généralement une fonction de C seul pour une fusée donnée).

$$3^\circ) \quad \gamma \text{ quelconque si } |\vec{p}_v| + p_c = 0.$$

Ce dernier cas est exceptionnel; le cas $|\vec{p}_v| + p_c = 0$ sur un certain arc conduit aux "arcs à poussée intermédiaire" de LAWREN [0, 1], l'étude faite en [8] montre qu'ils ne sont jamais optimaux pour les transferts de durée indifférente entre orbites elliptiques.

On obtient donc :

$$\mathcal{H} = \vec{p}_r \cdot \vec{V} - \frac{\mu}{r^3} \vec{p}_v \cdot \vec{r} + \max [0; |\vec{p}_v| + p_c] \cdot \gamma_{\max}$$

On en déduit :

$$\frac{d\vec{p}_v}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{V}} = - \vec{p}_r$$

$$\frac{d\vec{p}_r}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}} = \frac{\mu}{r^3} \left(\vec{p}_v - 3 \vec{r} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p}_v)}{r^2} \right)$$

$$\frac{dp_c}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial C} = - \max [0; |\vec{p}_v| + p_c] \cdot \frac{d\gamma_{\max}}{dC}$$

Dans le cas impulsif, cas limite lorsque $\gamma_{\max} \rightarrow +\infty$, p_c est fixe et égal à p_{cf} ($= -1$) donc $p_v (= |\vec{p}_v|)$ est égal à 1 au moment de l'impulsion et inférieur à 1 en dehors de ce moment :

$$p_{vI} = 1; \quad \vec{p}_{vI} \cdot \vec{p}_{vI}' = - \vec{p}_{vI} \cdot \vec{p}_{rI} = 0.$$

Le vecteur $\vec{p}_{vI}$, vecteur unitaire de la direction d'impulsion, a donc pour composantes les trois cosinus directeurs S_I , T_I , W_I .

Dans le cas de l'arc de poussée $\vec{p}_v$ et $\vec{p}_r$ sont voisins de ceux du cas impulsif; nous poserons : C_I = vitesse caractéristique de l'impulsion étudiée ($= |\Delta \vec{V}|$ relatif à cette impulsion),

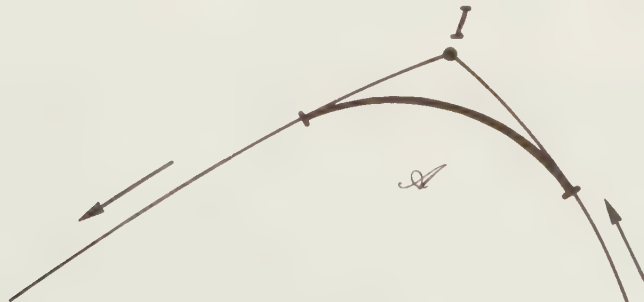


Fig. 91 - Impulsion I et arc $\mathcal{A}$.

(Impulse I and arc $\mathcal{A}$)

C_A = vitesse caractéristique de l'arc de poussée correspondant,

δt = durée de l'arc de poussée (donc $C_A = \int_{\delta t} \gamma(t) dt$)

$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_I^3}{\mu}}$ = période de révolution sur une orbite circulaire à la distance r_I de l'impulsion.

Nous recherchons la valeur minimale de C_A pour une loi d'évolution de γ_{max} , non infini, donnée, or $\vec{p}_v$ est le "vecteur efficacité" dont la longueur p_v est proportionnelle à l'efficacité de la poussée γ , si donc nous comptons les temps à partir de l'instant de l'impulsion considérée nous obtenons :

$$p_{vI} = 1$$

$$\vec{p}_v(t) = \vec{p}_{vI} - t \vec{p}_{rI} + \frac{t^2}{2} \vec{p}_{vI}'' + (\text{ordre } t^3)$$

$$p_v(t) = 1 + \frac{t^2}{2} (p_{rI}^2 + \vec{p}_{vI}, \vec{p}_{vI}'') + (\text{ordre } t^3)$$

or :

$$\vec{p}_{vI}'' = -p_{rI}' = -\frac{\mu}{r_I^3} (\vec{p}_{vI} - 3 \text{ partie radiale de } \vec{p}_{vI})$$

donc

$$\vec{p}_{vI} \cdot \vec{p}_{vI}'' = \frac{\mu}{r_I^3} (3S_1^2 - 1) = \frac{4\pi^2}{T^2} (3S_1^2 - 1)$$

soit

$$p_v(t) = 1 - \frac{t^2}{2} \left(\frac{4\pi^2}{T^2} (1 - 3S_1^2) - p_{rI}^2 \right) + (\text{ordre } t^3)$$

et puisque

$$\frac{C_A}{C_I} = \frac{\int_{\delta t} \gamma(t) dt}{\int_{\delta t} p_v(t) \cdot \gamma(t) \cdot dt} + \left[\text{ordre } \left(\frac{\delta t}{T} \right)^3 \cdot \frac{C_I T}{r_I} \right]$$

On obtient donc :

1°) Cas où $\gamma(t)$ est constant :

$$\frac{C_A}{C_I} = 1 + \frac{\pi^2}{6} \left[\frac{\delta t}{T} \right]^2 \left[1 - 3S_1^2 - \frac{r_I^3}{\mu} p_{rI}^2 \right] + \text{ordre } \left(\frac{\delta t}{T} \right)^3$$

2°) Cas où $\gamma(t)$ est variable :

le facteur $\frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\delta t^2}{T^2}$ doit être remplacé par :

$$\frac{2\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\int_{\delta t} t^2 \cdot \gamma \cdot dt}{\int_{\delta t} \gamma \cdot dt}$$

en ayant soin de choisir $\int_{\delta t} t^2 \cdot \gamma \cdot dt$ minimum c'est-à-dire prenant l'origine de l'arc de poussée telle que : $\int_{\delta t} t \gamma dt = 0$ (l'instant médian de l'arc de poussée ne correspond donc pas exactement en général à l'instant de l'impulsion).

L'expression obtenue est très voisine de $\frac{\pi^2}{6} \frac{\delta t^2}{T^2}$ si γ varie lentement et elle est en accord avec celle indiquée à la fin de la première partie (chapitre I, 5. Considérations pratiques).

La perte relative (en vitesse caractéristique) due à la limitation de la poussée est donc :

$$\frac{\delta C}{C_I} = \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot \frac{\int_{\delta t} t^2 \gamma dt}{\int \gamma dt} \left[1 - 3S_1^2 - \frac{r_I^3 p_{rI}^2}{\mu} \right] + \text{ordre} \left(\frac{St}{T} \right)^3$$

(en ayant soin de choisir l'origine de l'arc de poussée telle que $\int_{\delta t} t \gamma dt = 0$ les temps étant comptés à partir de l'instant théorique de l'impulsion).

Si $\gamma (\equiv \gamma_{max})$ varie lentement cette perte relative est très voisine de $\frac{\delta C_0}{C_I}$ avec :

$$\frac{\delta C_0}{C_I} = \frac{\pi^2}{6} \frac{\delta t^2}{T^2} \left[1 - 3S_1^2 - \frac{r_I^3 p_{rI}^2}{\mu} \right]$$

REMARQUE I : $\frac{\pi^2}{6} \left(\frac{\delta t}{T} \right)^2$ reste toujours inférieur à UN millième dans le cas de la terre si $\delta t \ll 2$ minutes (car $T \geq 84,5$ minutes).

REMARQUE II : Si l'on ne sait rien sur p_{rI} , ce qui peut arriver si la durée du transfert est fixée rigoureusement, on peut néanmoins donner une limite supérieure de la perte en supposant $p_{rI} = 0$ on obtient ainsi :

$$\frac{\delta C_0}{C_I} \ll \frac{\pi^2}{6} \frac{\delta t^2}{T^2} (1 - 3S_1^2)$$

(Rappelons que dans "l'angle spatial utile" on a toujours $|S_1| \leq \frac{1}{2}$).

REMARQUE III : Si l'on admet sur la durée du transfert de petits écarts de l'ordre $\frac{\delta t^2}{T}$ par rapport à la durée obtenue dans le cas impulsif (durée qui peut elle-même être ajustée comme cela est indiquée dans le chapitre V, 1 sur le rendez-vous) le problème devient "à temps final indifférent" et l'Hamiltonien $\mathcal{H}$ est identiquement nul, donc :

$$\vec{p}_{rI} \cdot \vec{V}_I = \mu \frac{\vec{r}_I \cdot \vec{p}_{vI}}{r_I^3} \left(= \frac{\mu}{r_I^2} S_1 \right)$$

comme d'autre part $\vec{p}_{vI} \cdot \vec{p}_{rI} = 0$, si l'on appelle α (avec $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) l'angle entre $\vec{V}_I$ et $\vec{p}_{vI}$ (ou entre $\vec{V}_I$ et $\vec{\gamma}$) la valeur minimale de p_{rI} est

$$\frac{\mu S_1}{r_I^2 V_I \sin \alpha}$$

et donc :

$$\frac{r_I^3 p_{rI}^2}{\mu} \gg \frac{\mu S_1^2}{r_I^2 V_I^2 \sin^2 \alpha} = \frac{S_1^2}{\sin^2 \alpha (1 + e \cos E_I)}$$

d'où :

$$\frac{\delta C_0}{C_I} \ll \frac{\pi^2}{6} \frac{\delta t^2}{T^2} \left[1 - 3S_1^2 - \frac{S_1^2}{\sin^2 \alpha (1 + e \cos E_I)} \right]$$

L'expression entre crochets est particulièrement petite dans le cas des transferts entre orbites quasi-circulaires proches coplanaires intérieures (elle est alors inférieure à

$$\frac{3z^2}{16} \text{ avec } z = k - 1 = \frac{\max(A_1, A_2)}{\min(P_1, P_2)} - 1$$

REMARQUE IV : Si la perte écrite ci-dessus était négative l'impulsion considérée ne serait pas localement optimale (dans le cas où la durée du transfert est indifférente) on en déduit donc la condition (nécessaire et aussi suffisante) d'optimalité locale :

$$(\sin^2 \alpha)(1 + e \cos E)(1 - 3S_1^2) > S_1^2$$

condition déjà rencontrée (sans démonstration) à la fin du chapitre IV,1.



CONCLUSION

L'étude des transferts économiques (du point de vue de la masse de propulsif dépensée) entre orbites elliptiques lorsque la durée du transfert est indifférente conduit donc à des solutions indépendantes de la fusée étudiée; les conditions d'utilisation optimale d'une fusée sont : soit moteur arrêté, soit utilisation de la vitesse d'éjection maximale selon les instants, et le paramètre de coût d'un transfert est sa "vitesse caractéristique" somme arithmétique de tous les changements artificiels de vitesse.

Les transferts de vitesse caractéristique minimale sont toujours impulsionnels et comportent en général deux ou trois impulsions non infiniment petites (de direction toujours à moins de 30° du plan horizontal local); ils sont particulièrement simples si les orbites initiale et finale ont la même direction de grand axe. Il ne semble pas qu'il y ait des cas de transferts optimaux à quatre impulsions finies ou plus.

Si les orbites initiale et finale sont assez différentes (par exemple si l'angle des plans des deux orbites est supérieur à 60° , 1850) le transfert optimal est "par l'infini" il utilise théoriquement deux orbites paraboliques intermédiaires, deux impulsions finies et une ou deux impulsions infiniment petites à grande distance.

Le rendez-vous peut s'obtenir pour le même prix que le transfert simple relatif à la même orbite finale moyennant un supplément de temps de transfert de l'ordre de la révolution synodique relative aux deux orbites.

Du point de vue pratique les transferts optimaux "par l'infini" n'ont guère d'intérêt entre orbites coplanaires par contre entre orbites dont les plans forment un grand angle des solutions très intéressantes peuvent être obtenues par l'utilisation d'ellipses allongées et d'impulsions à grande distance.

D'autre part les impulsions théoriques ne peuvent être fournies par les fusées et l'on est amené à :

- 1°) fractionner les impulsions en parts à effectuer à un ou plusieurs tours d'intervalle;
- 2°) remplacer les impulsions ou parts d'impulsions par des arcs de poussée de courte durée; la perte relative est du second ordre par rapport à la durée de chaque arc de poussée.

Il serait certainement très intéressant d'approfondir l'examen encore très incomplet des transferts entre orbites quelconques et d'étudier les possibilités d'utilisation des freinages atmosphériques et l'influence des limitations de durée de transfert.

Manuscrit remis le 9 novembre 1967.

RÉFÉRENCES

- [0] J.P. MAREC - *Transferts orbitaux économiques (orbites elliptiques coplanaires coaxiales, durée illimitée)*. La Recherche Aérospatiale, mars-avril 1965.
- [0,1] D.E. LAWZEN - *Optimal intermediate thrust arcs in a gravitational field*. Astronautica Acta, vol. 8, 106-123 (1962).
- [0,2] H.G. MOYER - *Necessary conditions for optimal single impulse transfer*. A.I.A.A. J., vol. 4, n° 8, 1405, (août 1966).
- [0,3] J.V. BREAKWELL - *The optimisation of trajectories*. J. Soc. Indust. Appl. Math., vol. 7, n° 2, (juin 1959).
- [0,4] H.M. ROBBINS - *Optimality of intermediate thrust arcs of rocket trajectories*. A.I.A.A. J., vol. 3, 1094 - 1098 (1965).
- [0,5] F.W. GOBETZ - *Minimum impulse time free transfer between elliptic orbits*. United Aircraft Research
M. WASHINGTON Laboratories, Report n° 910330-4, Avril 1966).
T.N. EDELBAUM
- [0,6] F.W. GOBETZ - *Optimum transfers between hyperbolic asymptotes*. A.I.A.A. J., vol. 1, 2034 - 2041, (1963).
- [0,7] T.N. EDELBAUM - *How many impulses ?* A.I.A.A. Paper, No. 66-7, 3rd Aerospace Sciences Meeting, (24-26 janvier 1966).
- [1] P. CONTENSOU - *Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique*. Astronautica Acta, vol. 8 (1962), p. 134-150.
- [2] L.S. PONTRYAGIN - *The mathematical theory of optimal processes*. (Interscience publishers, a division
V.G. BOLTYANSKIE of John Wiley and Sons, New York - London 1962).
R.V. GAMKRELIDZE
E.F. MISCENKO
- [3] C. MARCHAL - *Transferts optimaux entre orbites elliptiques coplanaires (durée indifférente)*. Astronautica Acta, vol. 11, n° 6, (1965).
- [4] J.P. MAREC - *Transferts infinitésimaux impulsions économiques entre orbites quasi-circulaires non coplanaires*. Communication présentée au 17^e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9-15 octobre 1966.
- [5] T.N. EDELBAUM - *A general solution for minimum impulse transfers in the near vicinity of a circular orbit*. Analytical mechanics associates, Inc. Boston Office - Contrat NAS 12-26 Final Report. (Août 1966).
- [6] J.V. BREAKWELL - *Correspondance privée*.
- [7] C.B. WINN - *Minimum fuel transfer between co-axial orbits, both coplanar and non coplanar*. A.A.S. Preprint 66-119 (juillet 1966).
- [8] C. MARCHAL - *Généralisation tridimensionnelle et étude de l'optimalité des arcs à poussée intermédiaire de LAWZEN*. Astronautica Acta (à paraître).
- [9] A. VAN GELDER - *On minimum time minimum fuel rendez-vous*. Presented at the November 1960 - Meeting
E. BETRAMI of S.I.A.M.
H. MUNICK

SOMMAIRE

L'étude analytique des transferts économiques entre orbites képlériennes elliptiques, dans le cas où la durée du transfert est indifférente, demande d'abord (après un bref exposé des théories d'optimisation) l'examen des conditions d'utilisation optimale d'une fusée.

L'économie correspondant à la dépense minimale de propulsif, les conditions d'utilisation optimale d'une fusée sont : soit moteur arrêté, soit utilisation de la vitesse d'éjection maximale selon les instants; ces conditions permettent de choisir un paramètre de prix indépendant de la fusée étudiée : la vitesse caractéristique, somme arithmétique de tous les changements artificiels de vitesse.

L'étude des transferts de vitesse caractéristique minimale conduit aux résultats suivants :

1°) Le "rendez-vous" n'est pas plus coûteux que le "transfert simple", il demande seulement un peu plus de temps (le supplément de durée est toujours inférieur à la période de révolution sur l'orbite finale augmentée de la période de "révolution synodique" relative aux deux orbites).

2°) La recherche de sous-systèmes indépendants permet de résoudre un cas particulier, celui des transferts entre orbites coplanaires et coaxiales directes (c'est-à-dire ayant même direction de grand axe les périées étant d'un même côté du centre attractif). Les solutions optimales sont en général du "type de HOHMANN" par une ellipse intermédiaire bi-tangente en l'apogée le plus élevé et au périée de l'autre orbite. Toutefois, si les orbites considérées sont très écartées, la solution optimale est "par l'infini" : elle utilise des orbites intermédiaires paraboliques raccordées à grande distance par une ou deux impulsions infiniment petites (pratiquement, on utilisera plutôt des ellipses très allongées).

3°) Le cas des orbites coaxiales directes non coplanaires est lui aussi assez simple : les solutions optimales utilisent toujours des orbites intermédiaires coaxiales aux orbites initiale et finale de transfert, elles sont de trois types possibles : "de HOHMANN généralisé", "par l'infini" et "à 3 impulsions".

4°) Si les orbites initiale et finale du transfert sont coplanaires, le transfert optimal est en entier dans le plan des deux orbites, mais l'étude de ce cas est nettement plus compliquée que celle des deux cas précédents : les solutions optimales sont de huit types possibles dont il est vrai, quatre sont exceptionnels (les solutions optimales sont à une, deux ou trois impulsions ou bien "par l'infini" mais les cas à trois impulsions ne se présentent que si la somme des excentricités des orbites initiale et finale est supérieure à 1,712).

Les cas particuliers suivants de transferts entre orbites coplanaires sont étudiés en détail :

I - Transferts entre orbites quasi-circulaires voisines :

les solutions optimales sont très différentes selon que les orbites initiale et finale sont sécantes ou non sécantes.

II - Transferts entre orbites dont l'une est d'excentricité voisine de 1 :

ce cas présente des solutions de tous les types.

III - Transferts entre orbites égales :

il y a deux types de solutions optimales : "par l'infini" et "à deux impulsions symétriques".

IV - Transferts entre orbites coaxiales inverses :

il y a trois types de solutions optimales : "par l'infini", "par une ellipse bi-tangente en les apogées" et "par une ellipse bi-tangente en les périgées".

5°) Dans le cas où les orbites initiale et finale du transfert sont quelconques, l'étude est très compliquée et est restée très incomplète; toutefois, le cas des excentricités voisines de un est examiné de manière approfondie.

Tous les transferts optimaux rencontrés jusqu'ici sont composés d'impulsions séparées par des trajets balistiques sur des ellipses ou des paraboles intermédiaires. Les cas de transferts à deux ou trois impulsions non infiniment petites sont très fréquents ainsi que ceux "par l'infini" (utilisant deux paraboles intermédiaires de même plan et périgée respectivement que les deux orbites initiale et finale, ces deux paraboles sont raccordées à grande distance par un grand cercle ou une grande ellipse, il y a deux impulsions finies au périgée des paraboles et deux impulsions infiniment petites à grande distance); en particulier, le transfert optimal est toujours "par l'infini" si l'angle des plans des orbites initiale et finale est supérieur à 60° , 1850.

Il ne semble pas qu'il y ait de cas de transfert optimal à quatre impulsions finies ou plus.

L'étude s'achève par un examen du point de vue pratique sur les questions suivantes : rendez-vous (déjà présenté ci-dessus); examen de la possibilité pratique de transferts "par l'infini", ces transferts à peu près sans intérêt pratique dans les cas coplanaires sont au contraire très intéressants dans les cas de grandes variations du plan d'orbite; enfin, remplacement d'une impulsion théorique par un ou plusieurs arcs de poussée : la perte relative est du second ordre par rapport à la durée de l'arc de poussée (s'il est disposé optimalement), dans le cas de la terre, cette perte reste inférieure à un millième pour des arcs de durée deux minutes.



ABSTRACT

The analytical study of the optimal transfers between elliptic keplerian orbits begin with a short summary of the optimization theory and with the examination of the optimal conditions of rocket utilization.

We shall define the economy as the minimum expense of propellant for a given transfer. Then, the optimal conditions of rocket utilization are either the use of the maximum exhaust velocity or of a cut off (according to the position along the orbit); these conditions lead to a cost parameter independant of the given rocket : the characteristic velocity, arithmetical sum of all artificial changes of the velocity vector.

The study of the minimum characteristic velocity transfers leads to the following results :

1°) The "rendez-vous" is as expensive as the "simple transfer"; it requires only a longer duration. In the same way the possibility of splitting a thrust arc into many small thrust arcs applied at every revolution leads to consider the impulsional case only.

2°) The research of an independant sub-system leads to the study of a particular case : the transfers between coplanar and direct co-axial orbits (i.e. orbits whose major axes are superimposed and whose perigees are on the same side of the attracting planet). The optimal solutions are generally of the "HOHMANN type" (fig. 6) with two impulses, one of them being at the highest apogee; but if the initial and final orbits are very different the solution is of the type "by infinity" or "bi-parabolic" (fig. 6) using two parabolas or practically two very elongated ellipses.

3°) The case of direct co-axial and non-coplanar orbits is also rather simple. The optimal solutions utilize only intermediate ellipses which are co-axial to the initial and final orbits. They are of three types : The "generalized HOHMANN type" (fig. 11), the type "by infinity" (or bi-parabolic) (fig. 12) and the 3-impulse type (fig. 13).

The discussion, in that case, is given on figures 20, 23, 25 and 26.

4°) When the initial and final orbits are coplanar the optimal solution is always in the plane of the two orbits; but this case is much more complicated than the other two : the optimal solutions are of eight different types, such as on figures 40 bis, but fortunately the two three-impulses types are very rare, they only appear when the sum of the eccentricities of the initial and final orbits is greater than 1.712.

The following particular cases are studied in detail :

I. Transfers between near-circular close orbits.

There are two main cases : intersecting orbits (fig. 42 and 43) and non-intersecting orbits (fig. 44 to 51).

II. *Transfers between orbits the eccentricity of one of which is close to one* (fig. 53 to 58); this case presents solutions of all types.

III. *Transfers between equal orbits.* There are two types of optimal solutions (fig. 60 and 62) "by infinity" and "with two symmetrical impulses".

IV. *Transfers between inverse (or opposing) co-axial orbits.* They are of three types (fig. 64) : "by the perigees" , "by the apogees" and "by infinity". The discussion between these cases is given on figures 67 to 71.

Figures 72 to 76 are related to the general discussion of optimal transfers between coplanar orbits.

5°) In the case of arbitrary initial and final orbits, the study is very complicated and very incomplete; however the case of the eccentricities close to one is solved to the first order.

The optimal transfers are always impulsional and, to this day, only one-, two- or three- impulses transfers and "by infinity" (or "bi-parabolic") transfers are obtained (the "bi-parabolic" transfers utilize two finite impulses at the perigees and one or two infinitesimal impulses at infinity). There is probably no four-finite impulse optimal transfer.

The end of the study deals with the practical point of view concerning : 1) rendez-vous, 2) bi-parabolic transfers (very useful for the case of large angles between the orbital planes), 3) the replacement of a theoretical impulse by one or several thrusting arcs (the relative loss is generally very small).



ZUSAMMENFASSUNG

Eine analytische Untersuchung der ökonomischen Überführungen zwischen elliptischen Keplerbahnen verlangt, im Falle beliebiger Überführungsdauer, zunächst, nach einer kurzen Darstellung der Optimisationstheorien, die Untersuchung der Bedingungen optimaler Benützung einer Rakete.

Da die Ökonomie minimalem Aufwand des Vorschubsmittels entspricht, sind die Bedingungen optimaler Benützung einer Rakete : entweder abgestellter Motor, oder Benützung der dem jeweiligen Zeitpunkt entsprechenden maximalen Ausschubgeschwindigkeit; diese Bedingungen erlauben die Wahl eines von der untersuchten Rakete unabhängigen Kostenparameters : die charakteristische Geschwindigkeit, d.h. die arithmetische Summe aller künstlich herbeigeführter Geschwindigkeitsänderungen.

Die Untersuchung der Überführungen minimaler charakteristischer Geschwindigkeit führt zu folgenden Ergebnissen :

1°) Die "Begegnung" ist nicht teurer als die "einfache Überführung", sie erfordert nur eine etwas grössere Zeit (die Zeitvergrösserung ist immer kleiner als die Umlaufsdauer auf der Endbahn zuzüglich der Dauer des, die beide Bahnen betreffenden, "synodischen Umlaufs").

2°) Die Suche nach unabhängigen Untersystemen erlaubt die Lösung eines besonderen Falles, den der Überführungen zwischen komplanaren, coaxialen, direkten Umlaufsbahnen (d.h. mit der selben Richtung der grossen Achse und den Perigeen auf der selben Seite des Anziehungszentrums). Die Optimallösungen sind im allgemeinen von "HOHMANN'schem Typus" entsprechend einer zwischenliegenden im höchsten Apogeum und im Perigeum der anderen Bahn doppelt berührenden Ellipse. Wenn jedoch die betreffenden Bahnen sehr entfernt sind, ist die optimale Lösung eine "bei Unendlichen optimale" : sie benützt parabolische, in grosser Entfernung durch ein oder zwei unendlich kleine Impulse zusammengefügte Zwischenbahnen (in der Praxis benützt man eher sehr langgestreckte Ellipsen).

3°) Der Fall coaxialer, direkter, nicht komplanarer Bahnen ist auch ziemlich einfach : die optimalen Lösungen bedienen sich immer zur Anfangs- und Endüberführungsbahn coaxialer Zwischenbahnen; sie sind von drei möglichen Typen : "verallgemeinerter HOHMANN'scher", "bei Unendlichen optimaler" und "Drei-impuls-typus".

4°) Wenn die Anfangs- und End-Überführungsbahn komplanar sind, liegt die optimale Lösung vollständig in der Ebene der zwei Bahnen, aber die Untersuchung dieses Falles ist merklich komplizierter als die der zwei vorhergehenden Fälle : acht Typen optimaler Lösungen sind möglich, von denen allerdings vier zur Ausnahme gehören (die optimalen Lösungen sind solche mit einem, zwei oder drei Impulsen oder "bei Unendlichen optimale", aber der Fall mit drei Impulsen tritt nur auf, wenn die Summe der Excentricitäten der Anfangs- und Endbahn grösser als 1,712 ist).

Folgende besondere Fälle der Überführungen zwischen komplanaren Bahnen werden im Einzelnen untersucht :

I - Überführungen zwischen quasi-kreisförmigen benachbarten Bahnen : die optimalen Lösungen sind sehr verschieden je nach dem die Anfangsbahn die Endbahn schneidet oder nicht.

II - Überführungen zwischen Bahnen von welchen eine Bahn eine zu eins benachbarte Excentricität hat :

dieser Fall bietet Lösungen aller Typen dar.

III - Überführungen zwischen gleichen Bahnen :

es gibt zwei Typen optimaler Lösungen : "bei Unendlichen optimale" und "mit zwei symmetrischen Impulsen".

IV - Überführungen zwischen coaxialen, inversen Bahnen : es gibt drei Typen optimaler Lösungen : "bei Unendlichen optimale", "mittels einer in den Apogeen doppelt berührender Ellipse" und "mittels einer in den Perigeen doppelt berührender Ellipse".

50) Im Falle beliebiger Anfangs – und Endüberführungsbahn ist die Untersuchung sehr kompliziert und ist sehr unvollständig geblieben; immerhin wird der Fall von zu eins benachbarten Excentricitäten eingehend untersucht.

Alle bis jetzt begegneten optimalen Überführungen sind aus Impulsen zusammengesetzt, die durch ballistische Zwischenbahnen, auf Ellipsen oder Parabeln, getrennt sind. Der Fall von Überführungen mit 2 oder 3 nicht unendlich kleinen Impulsen sind sehr häufig, ebenso wie die "bei Unendlichen optimalen" Übergänge (welche zwei Zwischenparabeln gleicher Ebene und gleichen Perigeums benützen, wie die Anfangs – und Endbahn, diese zwei Parabeln sind, in grosser Entfernung, durch einen grossen Kreis oder eine grosse Ellipse zusammengefügt; es gibt zwei endliche Impulse im Perigeum der Parabeln und zwei unendlich kleine Impulse in grosser Entfernung); im besonderen, ist die optimale Überführung immer "bei Unendlichen optimal", wenn der Winkel der Ebenen der Anfangs – und Endbahn grösser als 60° , 185° ist.

Es scheint nicht Fälle optimaler Überführungen mit vier endlichen Impulsen oder mehr zu geben.

Die Untersuchung endet sich mit einer vom praktischen Standpunkte ausgehenden Analyse folgender Fragen : Begegnung (schon weiter oben behandelt); Untersuchung der praktischen Möglichkeit von "bei Unendlichen optimaler" Überführungen, wobei diese Überführungen, ziemlich ohne praktisches Interesse in den komplanaren Fällen, im Gegenteil, in Fällen grosser Bahnebenenänderungen, sehr interessant sind; schliesslich, der Ersatz eines theoretischen Impulses durch einen oder mehrere Vorschubbogen : der relative Verlust ist von zweiter Ordnung in Bezug auf die Dauer des Vorschubbogens (wenn er optimal angesetzt ist); im Falle der Erde dieser Verlust bleibt kleiner als ein Tausendstel für Bogen, deren Dauer zwei Minuten beträgt.



КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ

Аналитическое изучение экономных переходов между кеплеровыми, эллиптическими орбитами предполагает прежде всего (после краткого изложения теорий оптимизации), в случае если продолжительность перехода безразлична, обзор условий оптимального использования ракеты.

Принимая во внимание, что экономия выражается в минимальном расходе горючего, условия оптимального использования ракеты следующие: или остановка мотора, или максимальная скорость истечения в зависимости от времени; эти условия дают возможность выбрать параметр цены не зависящий от исследуемой ракеты: характеристическую скорость, т.е. арифметическую сумму всех искусственных перемен скорости.

Изучение переходов с минимальной характеристической скоростью приводит к следующим результатам:

1) "Встреча" стоит не дороже чем "простой переход". Для нее нужно просто немного больше времени (дополнительная продолжительность во всяком случае меньше чем период оборота на конечной орбите увеличенной до периода "синодического вращения" относящегося к двум орбитам).

2) Изыскание независимых подсистем позволяет решить задачу относящуюся к общему случаю переходов между компланарными, коаксиальными, прямыми орбитами (т.е. орбитами имеющими то же направление большой оси, принимая во внимание, что перигеи находятся с одной и той же стороны центра притяжения). Оптимальные решения относятся вообще к Хохманнскому типу путем среднего эллипса двухкасательного в самом большом апогее к одной орбите и к перигею другой орбиты. Если, тем не менее, имеемые в виду орбиты очень удалены, оптимальное решение принимает вид решения "способом безконечности": используются промежуточные, параболические орбиты воссоединенные на большом расстоянии одним или двумя безконечно-малыми импульсами (на практике используются скорее очень удлиненные эллипсы).

3) Случай коаксиальных, прямых, некопланарных орбит тоже довольно прост: в оптимальных решениях всегда используются коаксиальные, промежуточные орбиты с начальной или конечной орбитой перехода и они принадлежат к трем из возможных разновидностей: "обобщенная Хохманновская", "способом бесконечности" и "трехимпульсная".

4) Если начальная и конечная переходные орбиты копланарны, оптимальный переход расположен всецело в плоскости двух орбит, но изучение этого случая гораздо более сложно чем изучение двух предыдущих случаев: оптимальные решения принадлежат к восьми возможным разновидностям, из коих, правда, четыре исключительны (оптимальные решения одно - двух - или трехимпульсные или же решение "способом бесконечности", но трехимпульсные разновидности возможны только тогда, когда сумма отклонений от центров начальной и конечной орбит превышает цифру $1,712$).
Вот какие особые случаи переходов между копланарными орбитами подробно изучены:

I - Переходы между квазикруговыми, соседними орбитами:
оптимальные решения очень различны в зависимости от того, являются ли начальная и конечная орбиты пересекающимися или непересекающимися.

II - Переходы между орбитами, из коих одна обладает отклонением центра близким к единице:
этот случай представляет решения всех типов.

III - Переходы между равными орбитами:
имеются две разновидности оптимальных решений: "способом бесконечности" и "симметричные, двухимпульсные".

IV - Переходы между коаксиальными, обратными орбитами:
имеются три разновидности оптимальных решений: "способом бесконечности", "способом эллипса двукасательного в апогеях" и "способом эллипса двукасательного в перигеях".

5) В случае начальной и конечной произвольных, переходных орбит исследование очень сложно и остается неполным; тем не менее, случай отклонений от центра близких к единице исследован подробно.

Все оптимальные переходы, имеемые до сих пор в виду, состоят из отдельных импульсов на баллистических отрезках пути на промежуточных эллипсах или параболах. Случаи двухимпульсных или трехимпульсных, не бесконечно-малых переходов очень часты, также как и случаи "способом бесконечности" (при использовании соответственно двух промежуточных парабол расположенных в одной и той же плоскости

и имеющих один и тот же перигей, как и начальная и конечная орбиты, эти две параболы соединены на большом расстоянии большой окружностью или большим эллипсом, имеется два конечных импульса в перигее парабол и два бесконечно-малых импульса на большом расстоянии); в частности, оптимальный переход всегда осуществляется "способом бесконечности", если угол между плоскостями начальной и конечной орбит превышает 60° I85.

Есть основания предполагать, что нет оптимальных переходов с четырьмя конечными импульсами или выше.

Исследование заканчивается анализом, с практической точки зрения, следующих вопросов: встреча (о которой была речь выше); анализ практической возможности переходов "способом бесконечности", принимая во внимание, что эти переходы без практического интереса в случае компланарности, представляют интерес в случае больших изменений плоскости орбиты; наконец, замена теоретического импульса одной или многими дугами тяги: относительная потеря второго порядка по отношению к продолжительности дуги тяги (если она расположена оптимально); в случае земли эта потеря остается меньше тысячной для дуг, продолжительность которых равна двум минутам.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

FIGURES D'ÉQUILIBRE SÉCULAIREMENT STABLES
DES MASSES FLUIDES HÉTÉROGÈNES EN ROTATION

Vu et approuvé :

Paris, le 4 juillet 1967.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

